MAT112 SAMMENDRAG

Laget av Augustin Winther
v. 2024-05-21

Gule bokser er definisjoner fra pensum.

Blå bokser er teoremer fra pensum.

Grønne bokser er forsåvidt teoremer, men pensum har ikke kategorisert de som det.

Kan inneholde feil og/eller mangler!

Kontaktinfo for å gi tilbakemeldinger finnes på nettsiden min:

winther.io

Test deg selv her!

Trig. identiteter

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

Trekant ulikhet

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a-b| \geq |a| - |b|$$

GENERELLE KALKULUS DEFINISJONER

Funksjoner av én variabel

Grenseverdi

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ eksisterer, gitt at}$$

$$x \in D_f \text{ og}$$

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad s.a. \quad 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Deriverbarhet *(deriverbar i punkt ⟹ kont. i punkt)*

$$f(x) \text{ deriverbar i } a\text{, gitt at}$$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ eksisterer}$$

Kontinuitet i punkt

$$f(x) \text{ kontinuerlig i } a\text{, gitt at}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ eksisterer}$$

Uniform kontinuerlighet

$$f(x) \text{ uniformt kontinuerlig på } I\text{, gitt at}$$

$$x_1, x_2 \in I\text{, og}$$

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta(\epsilon) > 0 \quad s.a. \quad |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Funksjoner av flere variabler

Grenseverdi

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \text{ eksisterer, gitt at}$$

$$(a,b) \text{ er ikke isolert, } (x,y) \in D_f \text{ og}$$

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad s.a. \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x,y) - L| < \epsilon$$

Deriverbarhet *(deriverbar i punkt ⟹ kont. i punkt)*

$$f(x,y) \text{ deriverbar i } (a,b)\text{, gitt att}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - hf_1(a,b) - kf_2(a.b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Kontinuitet i punkt

$$f(x,y) \text{ kontinuerlig i } (a,b)\text{, gitt att}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \text{ eksisterer}$$

Uniform kontinuerlighet *(ikke pensum)*

$$f(x,y) \text{ uniformt kontinuerlig på } D(f)\text{, gitt at}$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D(f)\text{, og}$$

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta(\epsilon) > 0 \quad s.a. \quad 0 < \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon$$

TEOREMER FRA «NOTAT OM UNIFORM KONTINUITET»

Teorem 2.1

f kont. på I (lukket og begrenset) $\implies f$ unif. kont. på I

Teorem 2.9

f unif. kont. på I (begrenset) $\implies f$ begrenset på I

Sats 2.2

f' begrenset på $I \implies f$ unif. kont. på I

Bemerkning 2.10

f ubegrenset på I (begrenset) $\implies f$ ikke unif. kont. på I

Ellipse

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

a: store halvakse

b: lille halvakse

(x_0, y_0): sentrum

$c=\sqrt{a^2-b^2}$

c: fokal seperasjon

Hyperbel

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

a: transvers halvakse

b: konjugat halvakse

(x_0, y_0): sentrum

$c=\sqrt{a^2+b^2}$

c: fokal seperasjon

Parabel

$y^2=4ax$

Foks: $(a,0)$ Strln: $x=-a$

$y^2=-4ax$

Foks: $(-a,0)$ Strln: $x=a$

$x^2=4ay$

Foks: $(0,a)$ Strln: $y=-a$

$x^2=-4ay$

Foks: $(0,-a)$ Strln: $y=a$

RIEMANN INTEGRAL

Definisjon

Viss f er begrenset på $[a,b]$ og $I_*=I^*$ da er f integrerbar på $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx=I_*=I^*$$

Teorem IV.5

f kont. på $[a,b] \Longrightarrow f$ integrerbar på $[a,b]$

En mer Formell definisjon

Den begrensede funksjonen f er integrerbar på $[a,b]$ gitt at $\forall\epsilon>0 \quad \exists P$ (partisjon) av $[a,b]$ $\; s.a.\; U(f,P)-L(f,P)<\epsilon$

$$U(f,P)=\sum_{j=1}^{n(P)} M_j\Delta x_j, \qquad M_j=\sup\{f(x): x\in[x_{j-1},x_j]\}$$
$$L(f,P)=\sum_{j=1}^{n(P)} m_j\Delta x_j, \qquad m_j=\inf\{f(x): x\in[x_{j-1},x_j]\}$$

$$\Delta x_j=x_j-x_{j-1} \qquad n(P)=\{\text{antall delintervaller}\}$$

PARAMETRISKE KURVER

Parametrisk kurve definisjon

Kurven $\mathcal{C}$ består av (f,g) hvor $x=f(t) \quad y=g(t) \quad t\in I$

$\mathcal{C}$ har rettning t_+ $\quad f$ og g er kont. og definert på I

Plan kurve definisjon

$\mathcal{P}$ er alle punkter (x,y) hvor $x=f(t) \quad y=g(t) \quad t\in I$

$\mathcal{P}$ har ingen rettning $\quad f$ og g er kont. og definert på I

Lengde (fra $t=a$ til $t=b$)

$$s=\int_a^b\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt$$

Jevnhet/Glatthet

Gitt $x'(t)$ og $y'(t)$ kont.

Viss $x'(t)\neq 0$ på I, da er $\mathcal{C}$ jevn/glatt og har for hver t en tangent med stigningstall lik $\frac{y'(t)}{x'(t)}$

Viss $y'(t)\neq 0$ på I, da er $\mathcal{C}$ jevn/glatt og har for hver t en normal med stigningstall lik $-\frac{x'(t)}{y'(t)}$

Område (begrenset av x-aksen, $\mathcal{C}$ og linjene $x=x(a)$ og $x=x(b)$)

$$A=\left|\int_a^b y(t)\cdot x'(t)\,dt\right|$$

POLAR KURVER

Polar-rektangulær konvertering

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta \qquad x^2+y^2=r^2 \qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

$x'(\theta)=0 \Rightarrow$ Vert. tangentlinje $\qquad y'(\theta)=0 \Rightarrow$ Hori. tangentlinje

Lengde (fra vinkelstråle α til vinkelstråle β)

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(f'(\theta)\right)^2+\left(f(\theta)\right)^2}d\theta \qquad \text{hvor } f(\theta)=r$$

Tangent retning (utenom i origo)

$$\tan\psi=\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

hvor $f(\theta)=r$ og ψ er vinkelen mellom radial linjen fra origo til ett punkt på kurven og kurven sin tangentlinje i det punktet

Område (begrenset av polar kurven og vinkelstrålene α og β)

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left(f(\theta)\right)^2d\theta \qquad \text{hvor } f(\theta)=r$$

REKKER OG KONVERGENSTESTER

Taylor rekke

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(c)}{k!}(x-c)^k$$

Geometrisk rekke

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}, \qquad r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}}$$

Geometrisk rekke delsum

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \qquad r \neq 1$$

Maclaurin rekke

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!}x^k$$

Potensrekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n$$

Potensrekke konvergens radius

$$R = \frac{1}{L} \text{ hvor } L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad L = \infty \Rightarrow R = 0 \qquad L = 0 \Rightarrow R = \infty$$

Kjente Maclaurin rekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \qquad x \in (-1,1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, x \in (-1,1]$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, x \in [-1,1]$$

Sammenligningstesten

$$0 \le a_n \le Kb_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergerer}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergerer} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

Grensesammenligningstesten

Gitt at $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er positive følger og $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$

$$L < \infty \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergerer} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$L > 0 \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergerer} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer}$$

Forholdstesten

a_n ultimately positive og $\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \neq 1$

$$0 \le \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$1 < \rho \le \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer}$$

Integraltesten

Gitt $f(n)$ er positiv, kont. og avtagende på $[N, \infty)$, $N \in \mathbb{Z}_+$

$$a_n = f(n)$$

Da er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\int_N^{\infty} f(t)dt$ begge konv. eller begge div.

Alternerende rekkerstest

(i) $a_n a_{n+1} < 0$ for $n \ge N$ (ii) $|a_{n+1}| \le |a_n|$ for $n \ge N$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Da vil $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergere

Rottesten

a_n ultimately positive og $\sigma = \lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} \neq 1$

$$0 \le \sigma < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$1 < \sigma \le \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer}$$

Binomial rekke

Viss $|x| < 1$, da

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n$$

Multinomial teoremet

$$m, k \in \mathbb{Z} \quad n \ge 2 \quad k \ge 1$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|m|=k} \frac{k!}{m_1!\, m_2!\, m_3! \cdots m_n!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$$

Teorem 4 Kapittel 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer}$$

PARTIELL DERIVASJON

Definisjon av partiell derivert

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y) = f_1(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y) = f_2(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

Definisjon av gradient

$$\nabla f(x,y) = f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j}$$

f øker mest i retning ∇f med $|\nabla f|$

f minker mest i retning $-\nabla f$ med $|\nabla f|$

Definisjon av retningsderivert

La $\mathbf{u}$ være en enhetsvektor. Den retningsderiverte i retning $\mathbf{u}$ er

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+hu_1, y+hu_2) - f(x,y)}{h}$$

Høyere ordens partielle derivasjon

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_{xx}(x,y) = f_{11}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_{yy}(x,y) = f_{22}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{12}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_{yx}(x,y) = f_{21}(x,y)$$

Teorem 6 Kapittel 13 (12 før 10. utg.)

f deriverbar i (a,b) og $\nabla f(a,b) \neq \mathbf{0}$

$\Rightarrow$ $\nabla f(a,b)$ normal vektor til nivåkurven til f i (a,b)

Kjerneregel versjon 1

$$z = f(x,y) = f(u(t), v(t))$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Kjerneregel versjon 2

$$z = f(x,y) = f(u(s,t), v(s,t))$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Retningsderivert via gradient

f deriverbar i (a,b) og $|\mathbf{u}| = 1$

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a,b)$$

PLAN OG LINJER

Plan gjennom punkt P_0, med normal $\mathbf{n}$

$\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ $\qquad$ $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

Normal til $z = f(x,y)$ ved $(a, b, f(a,b))$

$$\mathbf{n} = f_1(a,b)\mathbf{i} + f_2(a,b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Linje med retningsvektor $\langle a,b,c \rangle$ gjennom (x_0, y_0, z_0)

Parameter: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ $\qquad$ Standard: $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$

Tangent plan til $z = f(x,y)$ ved $(a, b, f(a,b))$

$$z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) \approx f(x,y)$$

nært punktet (a,b) (Lineærisering)

EKSTREMALVERDIER FOR FUNKSJONER AV FLERE VARIABLER

Nødvendige kriterier for ekstremalverdier

f ***kan*** ha esktremverdi i punktet $P \in D_f$, bare viss P er

(a) et **kritisk punkt** ($\nabla f(P) = \mathbf{0}$),

(b) et **singulert punkt** ($\nabla f(P)$ ikke eksisterer), eller

(c) et **randpunkt** av D_f

Tilstrekkelige betingelser for ekstremalverdier

f kontinuerlig funksjon av n variabler, hvor

$D_f \subset \mathbb{R}^n$ er lukket og begrenset. Da er f begrenset

og det er punkter hvor f har globale maks og min verdier

Andrederiverttesten *(to variabler)*

$A = f_{11}(a,b) \quad B = f_{12}(a,b) \quad C = f_{22}(a,b)$

$H = B^2 - AC$

$H > 0 \Rightarrow (a,b)$ sadelpunkt

$H < 0$ og $\mathrm{A} < 0 \Rightarrow (a,b)$ lokal maks.

$H < 0$ og $\mathrm{A} > 0 \Rightarrow (a,b)$ lokal min.

$H = 0 \Rightarrow$ inkonklusiv

Lagrange-multiplikator

Gitt f og g har kont. første partiell deriverte nær $P_0 = (x_0, y_0)$ på kurven $\mathcal{C}$: $g(x,y) = 0$.

Og gitt at $f(x,y)$ har lokal maks eller lokal min i P_0 når D_f er begrenset til $\mathcal{C}$.

Da, gitt P_0 ikke er et randpunkt på $\mathcal{C}$, og $\nabla g(P_0) \neq \mathbf{0}$, så finns det et tall λ_0 slik at

punktet (x_0, y_0, λ_0) er et kritisk punkt til $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$.