MAT121 SAMMENDRAG

Laget av Augustin Winther
v. 2024-04-24

Gule bokser er definisjoner fra pensum.

Blå bokser er teoremer fra pensum.

Grønne bokser er forsåvidt teoremer, men pensum har ikke kategorisert de som det.

Kan inneholde feil og/eller mangler!

Kontaktinfo for å gi tilbakemeldinger finnes på nettsiden min:

winther.io

Lineært system og utvidet matrise eksmpl.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 5x_1 - 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right]$$

TRAPPEFORM OG KONSISTENS

Definisjon av Trappeform (Echelon Form)

Alle null-rader er nederst, og den fremste verdien av alle ikke-null-rader ligger til venstre for den fremste verdien i raden under.

Eksempel hvor $\blacksquare$ er ikke-null og $*$ er vilkårlig verdier

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisjon av Redusert Trappeform (Reduced Echelon Form)

Samme som med **Trappeform**, i tillegg til at den fremste ikke-null verdien i alle ikke-null-rader er 1, og alle fremste ikke-null verdier er den eneste ikke-null verdien i sin kolonne.

Eksempel hvor $*$ er vilkårlige verdier

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1-tallene er på **pivot posisjonene** til matrisen, og kolonnene deres er **pivot kolonnene**.

Alle matriser er rad-ekvivalent til bare én redusert trappeform matrise

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en ikke-triviell løsning viss og bare viss ligningssystemet har minst én fri variabel.

Konsistens og unikhet

Et lineært system er konsistent viss og bare viss den siste kolonnen i den utvidede matrisen ikke er en pivot kolonne.

Viss et lineært system er konsistent, så er det enten

(1) Bare én unik løsning om det er ingen frie variabler, eller

(2) Uendelig mange løsninger om det er minst én fri variabel

INVERTIBLE MATRIX THEOREM (IMT)

La A være en $n \times n$ matrise.
De følgende utsagnene er ekvivalente:

(1) A er inverterbar (ikke **singulær**)

(2) Det finnes en matrise C slik at $CA = I_n$

(3) Det finnes en matrise D slik at $AD = I_n$

(4) A er rad-ekvivalent med I_n

(5) A har n pivot posisjoner

(6) Kolonnene til A er lineært uavhengig

(7) Kolonnene til A er en basis for $\mathbb{R}^n$

(8) $\text{col}(A) = \mathbb{R}^n$

(9) $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(10) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ er én-til-én

(11) $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

(12) $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ så har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ én løsning

(13) 0 er ikke en egenverdi av A

(14) $\text{rank}(A) = n$

(15) $\det(A) \neq 0$

(16) $\text{nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$

(17) $\text{nul}(A)^\perp = \mathbb{R}^n$

(18) $\text{col}(A)^\perp = \{\mathbf{0}\}$

(19) A^T er en inverterbar matrise

Matrise multiplikasjon eksempel

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

2×3 $\quad 3 \times 2$ $\quad 2 \times 2$

Like

Størrelsen til produktet

INVERSE EGENSKAPER

Viss A har en invers, så er $[\,A \quad I\,] \sim [\,I \quad A^{-1}\,]$

$AB = I$, da er A og B er inverterbare

Viss A og B er inverterbare:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$\left(A^\mathrm{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\mathrm{T}$$

Viss A er en 2×2 matrise $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, og $ad - bc \neq 0$, da er den inverse lik:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

LINEÆR UAVHENGIGHET

Definisjon

Vektorsettet $\{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_p}\} \in \mathbb{R}^n$ er lineært uavhengig viss og bare viss
$$x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots + x_p\mathbf{v_p} = \mathbf{0}$$
bare har den trivielle løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ viss og bare viss kolonnene til A er uavhengige

LINEÆR AVHENGIGHET

Definisjon

Vektorsettet $\{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_p}\} \in \mathbb{R}^n$ er lineært avhengig viss og bare viss
$$x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots + x_p\mathbf{v_p} = \mathbf{0}$$
har ikke-trivielle løsninger $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Om en vektor i et vektorsett kan skrives som en kombinasjon av andre vektorer i settet, da er settet lineært avhengig

Gitt vektorsettet $\{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_p}\} \in \mathbb{R}^n$
Viss $\mathbf{0} \in \{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_p}\}$, da er settet lineært avhengig

Gitt vektorsettet $\{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_p}\} \in \mathbb{R}^n$
Viss $p > n$, da er settet lineært avhengig

LEONTIEF INPUT-OUTPUT MODEL

Model

$\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$
$\mathbf{x}$: Mengde produsert
$C\mathbf{x}$: Mellomtidig etterspørsel
C: Konsumerings matrise
$\mathbf{d}$: Endelig etterspørsel

Kan skrives som
$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$

Viss C og $\mathbf{d}$ har ingen negative verdier og hver kolonne sum i C er mindre enn 1, så finns $(I - C)^{-1}$, og
$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d}$$

Viss kolonne summene til C er mindre enn 1, så er
$$(I - C)^{-1} \approx I + C + C^2 + \cdots$$

LINEÆR TRANSFORMASJON (LINEÆR AVBILDNING)

Definisjon

Transformasjonen T er lineær viss
$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D_T$, og
$T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}) \quad \forall c, \mathbf{u} \in D_T$.

Viss T er en lineær transformasjon, så er $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

La $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en lineær transformasjon. Da finnes det en unik matrise A slik at
$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Mer spesifikt, gitt $I_n = [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n]$, så er
$$A = [T(\mathbf{e}_1) \dots T(\mathbf{e}_n)]$$

Definisjon av lineær avbildning på ett domene

En transformasjon/avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er <u>på</u> $\mathbb{R}^m$ viss for hver $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$, så har $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ minst én løsning.

La $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformasjon med standardmatrise A.
Da er T en avbildning fra $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^m$ viss og bare viss $\mathrm{col}(A) = \mathbb{R}^m$

Definisjon av én-til-én lineær avbildning

En transformasjon/avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er <u>én-til-én</u> viss for hver $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$, så har $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ enten en unik løsning, eller ingen løsning.

La $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformasjon med standardmatrise A.
Da er T én-til-én viss og bare viss A er inverterbar.

La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en lineær transformasjon med standardmatrise A. La S være et geometrisk objekt i $\mathbb{R}^2$, da er
$$\{\text{areal til } T(S)\} = |\det(A)| \cdot \{\text{areal til } S\}$$

La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær transformasjon med standardmatrise A. La S være et geometrisk objekt i $\mathbb{R}^3$, da er
$$\{\text{volum til } T(S)\} = |\det(A)| \cdot \{\text{volum til } S\}$$

La S være parallellogrammet utspent av vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
Arealet til $S = ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||$

La S være parallellepipeden utspent av vektorene $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.
Volumet til $S = |(\mathbf{u} \dot{\times} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$

Gitt vektorrommet V med $\dim(V) = n$ og en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_n\}$, en vektor $\mathbf{x} \in V$, og den lineære transofrmasjonen $T : V \to V$ så er
$$[T(\mathbf{x})]_\mathcal{B} = M[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$$
hvor $M = [\ [T(\mathbf{b}_1)]_\mathcal{B}\ \ [T(\mathbf{b}_2)]_\mathcal{B}\ \dots\ \ [T(\mathbf{b}_n)]_\mathcal{B}\ ]$

M kalles *«matrisen for T relativ til basisen $\mathcal{B}$»*

DETERMINANTER

Definisjon

Determinanten til en $n \times n$ $(n \geq 2)$ matrise $A = [a_{ij}]$ er summen av n elementene på formen $\pm a_{1j}$ med vekslende pluss og minus tegn.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j} \det(A_{1j})$$

Determinant via kofaktorekspansjon

Gitt $n \times n$ matrisen $A = [a_{ij}]$ med kofaktor $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, så kan man finne determinanten ved kofaktor ekspansjon over rad nummer i

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Eller ved kofaktor ekspansjon over kolonne nummer j

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Viss A er triangulær, så der $\det(A)$ produktet av diagonalen

Viss A er en $n \times n$ matrise, da er: $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$

Viss A og B er en $n \times n$ matriser, da er: $\det(AB) = \det(A)\ \det(B)$

Viss A er en 2×2 matrise, da er arealet til parallellogrammet gitt av kolonnene til A lik $\det(A)$. Viss A er en 3×3 matrise, da er volumet til parallelepipeden gitt av kolonnene til A lik $\det(A)$

Rad operasjoner

La A være en $n \times n$ matrise.

(a) Et multiplum av en rad i A lagt til en annen rad for å produsere B gir at: $\det(B) = \det(A)$

(b) Viss to rader i A byttes om for å produsere B, da er: $\det(B) = -\det(A)$

(c) Viss en rad i A multipliseres med k for å produsere B, da er: $\det(B) = k\det(A)$

Cramers regel

La A være en inverterbar $n \times n$ matrise. For hver $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ er den unike løsningen $\mathbf{x}$ til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$x_i = \frac{\det(A_i(\boldsymbol{b}))}{\det(A)}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Hvor $A_i(\boldsymbol{b})$ er matrisen A med kolonne i byttet ut med $\mathbf{b}$

En invers formel

La A være en inverterbar $n \times n$ matrise. Da er $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$

Hvor $\operatorname{adj}(A)$ er den **adjungerte matrisen** av A: $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$

MINSTE KVADRATERS PROBLEM

Definisjon

Viss A er $m \times n$ og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, en minste kvadraters løsning for $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er en $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ slik at

$$||\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}|| \leq ||\mathbf{b} - A\mathbf{x}|| \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

La A være $m \times n$. De følgende utsagnene er ekvivalente

(1) Kolonnene til A er lineært uavhengige

(2) Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en unik minste kvadraters løsning $\hat{\mathbf{x}}$ for hver $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$

(3) Matrisen $A^{\mathrm{T}}A$ er inverterbar

(4) Minste kvadraters løsningen er $\hat{\mathbf{x}} = (A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$

Settet med minste kvadraters løsning for $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er det samme som det ikke-tomme settet med løsninger for **normal likningen** $A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$

Lineærisering med minste kvadraters metode (Lineær regresjon)

Gitt en mengde datapunkt $(x_1, y_1)\ (x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$, så er minstekvadraters linje lik $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

Man finner β_0 og β_1 ved minste kvadraters metode: $X^{\mathrm{T}}X\boldsymbol{\beta} = X^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$, hvor

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

VEKTORROM, UNDERROM, BASISER OG KOORDINATSYSTEMER

Definisjon av vektorrom

Et vektorrom er et ikke tomt sett V av vektorer. De følgende aksiomene må holde for alle vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ og alle skalarer c og d.

(1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$

(2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(3) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(4) $\exists \mathbf{0} \in V \ : \ \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

(5) $\forall \mathbf{u} \in V \quad \exists (-\mathbf{u}) \ : \ \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(6) $c\mathbf{u} \in V$

(7) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{v} + c\mathbf{u}$

(8) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$

(9) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

(10) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Definisjon av nullrom

$$\text{nul}(A) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \ \wedge \ A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Nullrommet til en matrise A, er settet av alle løsningsvektorene $\mathbf{x}$ til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Definisjon av underrom

Et underrom H av et vektorrom V har følgende egenskaper for alle vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in H$ og alle skalarer c

(1) Nullvektoren i V er i H

(2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$

(3) $c\mathbf{u} \in H$

Definisjon av basis

La H være et underrom av vektorrommet V.

Et sett av vektorer $\mathcal{B} \in V$ er en basis for H viss

(1) $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig, og
(2) $H = \text{span}(\mathcal{B})$

Definisjon av kolonnerom

$$A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$$
$$\Rightarrow \text{col}(A) = \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\})$$

Definisjon av radrom

$$A^{\mathrm{T}} = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n]$$
$$\Rightarrow \text{row}(A) = \text{span}(\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\})$$

Definisjon av dimensjon

Dimensjonen til et vektorrom V skrives som: $\dim(V)$, og er definert som antall vektorer i en basis for V.

La V være et vektorrom der $\dim(V) = p \geq 1$. Ett hvert lineært uavhengig sett av p elementer i V er en basis for V.

Definisjon av rank

$$\text{rank}(A) = \dim\big(\text{col}(A)\big)$$

Definisjon av nullitet

$$\text{nullity}(A) = \dim\big(\text{nul}(A)\big)$$

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \dots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for vektorrommet V. Vektoren $\mathbf{u}$ er i V viss det finnes vekter $x_1, x_2, \dots x_n$ slik at $\mathbf{u} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$

Gitt $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, og $A = [\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n]$. Da er $\mathbf{u} \in V$ viss $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ er konsist.

For å finne vektene løser man ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ for $\mathbf{x}$.

Viss $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ er i vektorromet V, så er $\text{span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\})$ et underrom av V

Pivot kolonnene til en matrise A former en basis for $\text{col}(A)$

Viss to matriser A og B er rad-ekvivalente, så har de samme radrom. Viss B er på trappeform så vil ikke-null radene til B forme en basis for radrommet til A og B

Definisjon vektor relativ til basis (koordinatsystem)

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for vektorrommet V og $\mathbf{x} \in V$. Koordinatene til $\mathbf{x}$ relativ til basisen $\mathcal{B}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, er vektene $c_1, \dots c_n$ slik at $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [c_1 \dots c_n]$$

Matrisen som gjør $\mathcal{B}$-koordinatene til en vektor om til standard koordinatene er matrisen med alle $\mathcal{B}$-basisvektorene

$$P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$$

Slik at $\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ og vice-versa $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{x}$

Basisskifte

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$, og $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ være basiser for vektorrommet V. Da finnes det en unik $n \times n$ matrise $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ slik at

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Kolonnene til $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ er $\mathcal{C}$-koordinat vektorene av vektorene i basisen $\mathcal{B}$

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [\ [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \ \dots \ [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}\ ]$$

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$$

$$[\ \mathbf{c}_1 \ \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_n \ | \ \mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n] \sim [\ I \ | \ P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}\ ]$$

Ranken til en matrise er antall pivot kolonner. Nulliteten til en matrise er antall frie variabler, som videre betyr at nullitet er antall kolonner som ikke er pivot kolonner.

EGENVEKTORER OG EGENVERDIER

Definisjon av egenvektor og Egenverdi
En egenvektor til en $n \times n$ matrise A, er en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ slik at $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ for en egenverdi λ.

Viss $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ er egenvektorer med tilhørige unike egenverdier $\{\lambda_1, \dots, \lambda_2\}$ til en $n \times n$ matrise, så er $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ lineær uavhengig.

Egenverdiene til en trianguler matrise er verdiene på diagonalen

Den karakteristiske ligning
En skalar λ er en egenverdi til $n \times n$ matrisen A viss og bare viss

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Denne ligningen vil som regel føre til et **karakteristisk polynom**.

Definisjon av algebraisk multiplisitet
Den algebraiske multiplisiteten til en egenverdi er antall ganger den forekommer som rot i det karakteristiske polynomet.

Geometrisk multiplisitet $\leq$ Algebraisk multiplisitet

Definisjon av egenrom
Settet av alle egenvektorer til en matrise A med samme egenverdi λ er et egenrom, også kalt det **karakteristiske rommet** til A assosiert med λ.

Definisjon av geometrisk multiplisitet
Den geometriske multiplisiteten til en egenverdi er dimensjonen til det karakteristiske rommet assosiert med egenverdien.

Algebraisk multiplisitet er maks antall egenvektorer som kan tilhøre egenverdien.

Geometrisk multiplisitet er faktisk antall egenvektorer som tilhører egenverdien.

ORTOGONALITET

Definisjon av indreprodukt (prikkprodukt)
Det indreproduktet av to vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ er

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

Definisjon av vektorlengde (norm)

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Definisjon av distanse mellom vektorer
Distansen mellom to vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ er

$$\mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$$

Definisjon av ortogonalitet
To vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ er ortogonale med hverandre viss $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

Definisjon av ortogonal Basis
En basis som også er ett ortogonalt sett

Definisjon av ortogonalt Komplement
Settet med alle vektorer som er ortogonalt med alle vektorer i vektorrommet W er det ortogonale komplementet $W^{\perp}$ til W

Definisjon av ortogonal/ortonormal matrise
En $n \times n$ matrise hvis rader og kolonner er ortonormale vektorer

La A være en $m \times n$ matrise. Det ortogonale komplementet til radrommet til A er nullrommet til A

$$\left(\mathrm{row}(A)\right)^{\perp} = \mathrm{nul}(A)$$

Det ortogonale komplementet til kolonnerommet til A er nullrommet til A^{T}

$$\left(\mathrm{col}(A)\right)^{\perp} = \mathrm{nul}(A^{\mathrm{T}})$$

Definisjon av et ortogonalt Sett
Ett sett med vektorer $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \in \mathbb{R}^n$ er et ortogonalt sett viss hvert mulig par med unike vektorer fra settet er ortogonale

Viss S er ett ortogonalt sett med ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^n$, så er S lineært uavhengig.

Definisjon av et ortonormalt sett
Et ortogonalt sett der alle vektorene er enhetsvektorer

En $m \times n$ matrise A har ortonormale kolonner viss og bare viss $A^{\mathrm{T}}A = I$

Beste tilnærmings teoremet
Gitt W ett underrom av $\mathbb{R}^n$, og gitt $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, og $\hat{\mathbf{y}} = \mathrm{proj}_W(\boldsymbol{y})$, så er

$$||\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}|| < ||\mathbf{y} - \mathbf{v}|| \text{ for alle } \mathbf{v} \in W \text{ ulike fra } \hat{\mathbf{y}}.$$

Med andre ord, $\hat{\mathbf{y}}$ er punktet i W som er nærmest $\mathbf{y}$

La $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ være en ortogonal basis for underrommet W av $\mathbb{R}^n$. For hver $\mathbf{y}$ i W, så er vektene til den lineære kombinasjonen

$$y = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p$$

gitt ved

$$c_j = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u_j}}{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j} \qquad j = 1, \dots, p$$

Ortogonal projeksjon
Den ortogonale projeksjonen $\hat{\mathbf{y}}$ av vektoren $\mathbf{y}$ på vektoren $\mathbf{u}$ er gitt ved

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u}$$

Viss vektoren $\boldsymbol{z}$ er komponenten til $\mathbf{y}$ som er ortogonal til $\mathbf{u}$, så er $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$

Ortogonal projeksjon dekomponering
Gitt W ett underrom av $\mathbb{R}^n$. For hver $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ så

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}, \text{ hvor } \hat{\mathbf{y}} \in W, \text{ og } \mathbf{z} \in W^{\perp}.$$

Viss $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ er en ortogonal basis for W, så

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p \quad \text{og} \quad \mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$$

SIMILÆRHET, SYMMETRI OR DIAGONALISERING

Definisjon av similærhet
Viss A og B er $n \times n$ matriser, da er A og B similære viss det finnes en inverterbar matrise P slik at $P^{-1}AP = B \iff A = PBP^{-1}$

Viss A og B er similære, så har de samme karakteristisk polynom og derfor samme egenverdier.

Definisjon av symmetrisk matrise
A er symmetrisk om $A = A^{\mathrm{T}}$

Viss A er symmetrisk så er hvilke somhelst to egenvektorer fra forskjellige egenrom ortogonale med hverandre.

En $n \times n$ symmetrisk matrise A har de følgende egenskapene:

(1) A har n egenverdier, inkludert multiplisive egenverdier

(2) Dimensjonen til egenrommet til hver egenverdi er lik multiplisiteten til egenverdien

Diagonaliserings teoremet
En $n \times n$ matrise A kan skrives som $A = PDP^{-1}$ hvor D er en diagonal matrise, viss og bare viss kolonnene til P er de n lineært uavhengige egenvektorene til A, og de diagonale verdiene til D er egenverdiene til A som tilsvarer henholdsvis egenvektorene i P

Diagonaliserbar Matrise Representasjon
Gitt $A = PDP^{-1}$, hvor D er en diagonal $n \times n$ matrise. Viss $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ basert på kolonnene fra P, da er D $\mathcal{B}$-matrisen for transformasjonen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Gjelder faktisk så lenge D er similær med A.

Ortogonal diagonaliserbar
En $n \times n$ matrise A er ortogonal diagonaliserbar viss det finnes en ortogonal matrise P (der $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$) og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^{\mathrm{T}} = PDP^{-1}$

En $n \times n$ matrise med n unike egenverdier er diagonaliserbar

En $n \times n$ matrise A er ortogonalt diagonaliserbar viss og bare viss A er symmetrisk.

Similærhetsdiagram (Dialagoniseringsdiagram viss B er diag.)
Gitt $A = PBP^{-1}$.

Hver pil illustrerer multiplikasjon med henvist matrise

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & A\mathbf{x} \arrow[d, "P"] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "B"'] & {[A\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}}
\end{tikzcd}$$

KVADRATISKE FORMER

Definisjon av kvadratisk Form
En kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$ er en funksjon Q definert på $\mathbb{R}^n$ hvis verdi ved en vektor $\mathbf{x}$ på $\mathbb{R}^n$ kan bli kalkulert med en likning på formen

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$$

hvor A er en $n \times n$ symmetrisk matrise kalt *matrisen til den kvadratiske formen*

Definisjon av variabel Bytte
Viss $\mathbf{x}$ representerer en variabel vektor i $\mathbb{R}^n$, da er et variabel bytte en likning

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \quad \iff \quad \mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$$

hvor P er en inverterbar matrise, og den nye variabel vektoren $\mathbf{y}$ er koordinat vektoren til $\mathbf{x}$ relativ til basisen til $\mathbb{R}^n$ bestemt av kolonnene til P

$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}D\mathbf{y}$ ved variable bytte $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$. Hvor $D = (P^{-1}AP)$ er en diagonal matrise. Kolonnene til P er <u>**prinsipiell aksene**</u> til $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$

En kvadratisk form Q er

(1) **Positiv bestemt** viss $Q(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
(2) **Positiv *semi*-bestemt** viss $Q(\mathbf{x}) \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
(3) **Negativ bestemt** viss $Q(\mathbf{x}) < 0 \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
(4) **Negativ *semi*-bestemt** viss $Q(\mathbf{x}) \leq 0 \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
(5) **Ubestemt** viss $Q(\mathbf{x})$ påtar både positive og negative verdier

La A være en $n \times n$ symmetrisk matrise. Da er den kvadratiske formen $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$

(1) Positiv bestemt viss og bare viss alle egenverdiene til A er positive
(2) Negativ bestemt viss og bare viss alle egenverdiene til A er negative
(3) Ubestemt viss og bare viss A har både positive og negative egenverdier

A er symmetrisk, $m = \min(\{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} : ||\mathbf{x}|| = 1\})$ og $M = \max(\{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} : ||\mathbf{x}|| = 1\})$
Da er m den minste egenverdien til A, og M den største egenverdien til A.
$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = m$ når $\mathbf{x}$ er enhetsegenvektoren til egenverdien lik m
$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = M$ når $\mathbf{x}$ er enhetsegenvektoren til egenverdien lik M

DET KOMPLEKSE ROMMET

Reelle og imaginære deler av en vektor

$$\mathbf{x} = \mathrm{Re}(\mathbf{x}) + i\,\mathrm{Im}(\mathbf{x})$$

La A være en reell 2×2 matrise med en kompleks egenverdi $\lambda = a - bi$ $(b \neq 0)$ og en tilhørende egenvektor $\mathbf{v}$ i det komplekse planet $\mathbb{C}^2$, da er

$$A = PCP^{-1}$$

hvor $P = [\ \mathrm{Re}(\mathbf{v}) \ \ \mathrm{Im}(\mathbf{v})\ ]$ og $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

Gram-Schmidt prosessen

Gitt en basis $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ for ett ikke-null underrom W av $\mathbb{R}^n$, definer

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{x}_p - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_{p-1}}{\mathbf{v}_{p-1} \cdot \mathbf{v}_{p-1}}\mathbf{v}_{p-1}$$

Da er $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ en ortogonal basis for W og $\mathrm{span}(\{\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_k\}) = \mathrm{span}(\{\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_k\})$ for $1 \leq k \leq p$

Matrise eksponent egenskaper

La A og P være $n \times n$ matriser. La k og $s \in \mathbb{Z}_+$

(1) $A^0 = I$

(2) $A^k = AAA \cdots A$ (k antall ganger)

(3) $A^k A^s = A^{k+s}$

(4) $\left(A^k\right)^s = A^{ks}$

(5) $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^k = \left(A^k\right)^{\mathrm{T}}$

(6) Viss P er inverterbar, så $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$