MAT131 SAMMENDRAG

Laget av Augustin Winther
v. 2024-05-09

Gule bokser er definisjoner.

Blå bokser er teoremer fra pensum.

Grønne bokser er forsåvidt teoremer, men pensum har ikke kategorisert de som det.

Kan inneholde feil og/eller mangler!

Kontaktinfo for å gi tilbakemeldinger finnes på nettsiden min:

winther.io

Randverdi-problem (BVP)

En differensiallikning sammen med verdiene til den ukjente funksjonen ved randen av domenet til funksjonen.

SENTRALE DEFINISJONER (*uformelle*)

Differensiallikning (DE)

En likning som viser relasjonen mellom én eller flere ukjente funksjoner og deres deriverte.

Ordinær differensiallikning (ODE)

En likning som viser relasjonen mellom én eller flere ukjente **én-variable-funksjoner** og deres deriverte.

Orden

En differensial likning sin orden er den *høyeste ordens deriverte* i likningen. For eksempel:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2}p(t) = y$$

er en 3. ordens differensial likning.

Lineær differensiallikning (LDE)

En differensial likning som er en lineær likning ved den ukjente funksjonen y, og kan derfor skrives som

$$a_0(t)y + a_1(t)y' + a_2(t)y'' + \cdots + a_n(t)y^{(n)} = g(t),$$

hvor $a_i(t)$ og $b(t)$ er vilkårlige deriverbare funksjoner.

En LDE er **homogen** om $g(t) = 0$

Likevekts punkt / kritisk punkt

En **konstant løsning** til en differensiallikning. Det vil si en løsning som har derivert lik 0 over alt på sitt domene.

Generelt har vi at $\mathbf{x}_c \in \mathbb{R}^n$ er et kritisk punkt/likevekts punkt viss

$d\mathbf{x}/dt = f(t, \mathbf{x})$ viss $f(t, \mathbf{x}_c) = 0$ for alle t.

Asymptotisk stabilt kritisk punkt

Ett kritisk punkt $\mathbf{x}_c$ hvor løsningskurvene $\mathbf{x}$ som er nær det kritiske punktet konvergerer mot det:

$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_c$ når $t \to \infty$

Initialverdiproblem (IVP)

En differensiallikning sammen med en initial verdi til den ukjente funksjonen på et gitt punkt i domenet til funksjonen.

Partiell differensiallikning (PDE)

En likning som viser relasjonen mellom én eller flere ukjente **fler-variable-funksjoner** og deres **partiell deriverte**.

Lineær likning

En likning som kan skrives som

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = g,$$

hvor x_i er variabler og a_i, samt g, er vilkårlige konstanter.

Ikke-lineær differensiallikning (NDE)

En differensial likning som **ikke** er en lineær likning ved den ukjente funksjonen y, og kan derfor ikke skrives som en LDE. For eksempel:

$$\frac{dy}{dt}y = f_0(t) + f_1(t)y + f_2(t)y^2 + f_3(t)y^3$$

Løsningskurver / integralkurver

Funksjoner som løser differensiallikningen. Disse kan plottes som kontinuerlige kurver.

Generell løsning

Utrykk som inneholder alle mulige løsninger til en differensiallikning, og tar ikke hensyn til initiale betingelser. Generelle løsninger kan plottes som retningsfelt.

Stabilt kritisk punkt

Alle løsningskurver $\mathbf{x}$ er begrenset, men konvergerer ikke mot det kritiske punktet: $\mathbf{x} \nrightarrow \infty$ når $t \to \infty$

Ustabilt kritisk punkt

Noen løsningskurver $\mathbf{x}$, kanskje alle utenom det kritiske punktet, er ubegrenset: $\mathbf{x} \to \infty$ når $t \to \infty$

FØRSTE ORDENS DIFFERENSIAL LIKNINGER

Generell 1. ord. LDE

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Ofte omskrevet til

$$P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = G(t),$$

gitt at $P(t) \neq 0$.

Generell løsning for generell 1. ord. LDE

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)g(t)dt + C\right],$$

hvor $\mu(t) = \exp(\int p(t)dt)$ er den **integrerende faktoren**, og C er en ukjent konstant som kan bestemmes gitt en initial betingelse.

Separabel 1. ord. LDE

En 1. ord. ODE er separabel om den er skrevet som

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

og skrives ofte om til **differensial formen**:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

Eksistens og unikhets teorem for 1. ord. LDE

Om p og g er kont. på et åpent intervall I, som inneholder t_0, da *eksisterer* det en *unik* funksjon $y = \phi(t)$ som løser

$y' + p(t) = g(t)$ med initial betingelsen $y(t_0) = y_0$ for alle $t \in I$.

Eksistens og unikhets teorem for 1. ord. NDE

Om f og $\partial f/\partial y$ er kont. på et åpent rektangel R i ty-planet, som inneholder (t_0, y_0), da, i et interval $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ inni R, *eksisterer* det en *unik* funksjon $y = \phi(t)$ som løser

$y' = f(t, y)$ med intial betingelsen $y(t_0) = y_0$.

Autonome 1. ord. ODE

En 1. ord. ODE som ikke avhenger eksplisitt av den uavhengige variabelen, og har formen

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Forskjellige autonome 1. ord ODE-er

	Differensial likning	Generell løsning	Symboler
Eksponentiell vekst	$y' = ry$	$y = y_0 e^{rt}$	$y_0 = y(0)$ r = «**vekst**»
Logistikklikningen	$y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$	$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$	$y_0 = y(0)$ K = «**bærekapasiteten**»
Terskelverdi	$y' = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)y$	$y = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0)e^{rt}}$	$y_0 = y(0)$ T = «**terskelverdi**»
Logistikklikningen med terskelverdi	$y' = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$	-	-

Disse modellene kan brukes til å modellere populasjonsvekster med vekstrate r som starter med y_0 individer, og som har et maksimum kapasitet på K individer, hvor populasjonen dør ut om den kommer under T individer.

Eksakt differensiallikning

Gitt en differensiallikning på formen

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

og gitt at det finnes en kont. deriverbar funksjon $\psi(x, y)$ slik at $\psi_x = M$ og $\psi_y = N$

da kalles differensiallikningen eksakt.

Eksakt differensiallikning

Gitt at M, N, M_y og N_x er kont. på et åpent rektangel $R \subset \mathbb{R}^2$, da er differensiallikningen

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

eksakt, viss og bare viss

$M_y(x, y) = N_x(x, y)$ for alle punkt på R.

En **ikke-eksakt** differensiallikning på formen $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ kan konverteres til en eksakt differensiallikning ved å multiplisere begge sider med en integrerende faktor $\mu(x, y)$ som tilfredstiller

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0$$

ANDRE ORDENS LDE

Generell 2. ord. LDE

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

Ofte omskrevet til

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t)$$

gitt at $P(t) \neq 0$.

Eksistens og unikhets teorem for 2. ord. LDE

Om p, q og g er kont. på et åpent intervall I, som inneholder t_0, da *eksisterer* det en *unik* funksjon $y = \phi(t)$ som løser

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

med initial betingelsen

$$y(t_0) = y_0 \text{ og } y'(t_0) = y_0'$$

for alle $t \in I$.

Løse generell 2. ord. LDE

Gitt likningen

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

Først finn den generelle løsningen til likningen når $g(t) = 0$

$$y_k(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

(**komplementær løsning**)

Finn så en hvilken som helst løsning $y_p(t)$ til den originale likningen (**partikulær løsning**)

Den generelle løsningen til likningen blir da $y_k(t) + y_p(t)$:

$$\phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$

Homogen 2. ord. LDE med konstante koeffisienter

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Dette er den enkleste 2.ord LDE-en og har **karakteristisk ligning**

$$ar^2 + br + c = 0$$

Karakteristiske røtter	Generell løsning
$r_1 \neq r_2$ og begge reelle	$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
$r_1 = r_2 = r$ og r reell	$y = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$
$r = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$

Superposisjonsprinsippet for homogene 2. ord LDE

Om y_1 og y_2 er to løsninger til

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

da er den lineære kombinasjonen $c_1 y_1 + c_2 y_2$ også en løsning for **vilkårlige** verdier av c_1 og c_2.

Om den initiale betingelsen $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ er gitt i tillegg, så vil det alltid være mulig å velge c_1 og c_2 slik at

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

tilfredsstiller differensiallikningen med de initiale betingelsene, viss og bare viss $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$

Ubestemte koeffisienters metode

Fungerer bare viss $g(t)$ består av ekspnent, sinus, cosinus, polynom, eller sum og/eller produkt av slike funksjoner.

$g(t)$ kan skrives som $g(t) = g_1(t) + \cdots + g_n(t)$, hvor hver $g_i(t)$ gir det i-ende underproblemet

$$ay'' + by' + cy = g_i(t)$$

$g_i(t)$	$y_{pi}(t)$
$P_n(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$	$t^s(A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \cdots + A_n)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}(\mathrm{A}\cos \beta t + \mathrm{B}\sin \beta t)$	$t^s(A_0 t^{n-0} + \cdots + A_n)e^{\alpha t} \cos \beta t$ $+ t^s(B_0 t^{n-0} + \cdots + B_n)e^{\alpha t} \sin \beta t$

s er antall ganger 0 forekommer som rot i $ar^2 + br + c = 0$. α er en rot av $ar^2 + br + c = 0$, det samme er $\alpha + i\beta$. A_i og B_i er ubestemte koeffisienter som blir funntet ved å putte y_{pi} i diff. likningen.

$$y_p(t) = y_{p1}(t) + y_{p2}(t) + \cdots + y_{pn}(t)$$

Wronskian for 2 funksjoner

Gitt f og g er deriverbare funksjoner, så er Wronskian av de i et punkt x lik

$$W[f,g](x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$$

Fundamentalt sett av løsninger

Om y_1 og y_2 er to løsninger til

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

og det finnes et punkt t_0 hvor

$$W[y_1, y_2](t_0) \neq 0,$$

da inneholder utrykket $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ *alle mulige* løsninger til differensiallikningen (en **generell løsning**), og løsningene y_1 og y_2 sies å danne ett **fundamentalt sett av løsninger**.

Om $y = u(t) + iv(t)$ er en løsning til

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

da er også $u(t)$ og $v(t)$ løsninger.

Variasjon av parameter

Gitt likningen $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$,
Viss p, q og g er kont. på et åpent intervall, og viss y_1 og y_2 danner et fundamentalt sett med løsninger til likningen når $g(t) = 0$, da er en partikulær løsning til likningen:

$$y_p(t) = -y_1(t) \int \frac{g(t) y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt + y_2(t) \int \frac{g(t) y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt$$

Ordens reduksjon

Gitt $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ med en løsning $y_1(t)$.
En annen løsning kan bli funnet ved å la $y = v(t)y_1(t)$, som gir $y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0$ som er en 1. LDE for v'.
Man løser for v', integrerer til v, og finner $y_2 = v(t)y_1(t)$.

For mer om lineær algebra, se winther.io/MAT121

SYSTEM AV 1. ORD. LDE

Matriseform

Systemet av 1. ord LDE-ene

$$x_1' = p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n' = p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t)$$

Kan skrives som: $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$, hvor

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

n-te ordens LDE til system av 1. ord. LDE

Gitt en generell n-te ord. LDE

$$a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + a_n(t)y^{(n)} = g(t).$$

La $\quad x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \ldots, \quad x_n = y^{(n-1)},$

som gir $\; x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = x_4, \quad \ldots, \quad x_{n-1}' = x_n.$

Vi har da et system av 1.ord LDE

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_3$$
$$\vdots$$
$$x_n' = \frac{-a_0(t)}{a_n(t)}x_1 + \frac{-a_1(t)}{a_n(t)}x_2 + \cdots + \frac{-a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n + \frac{g(t)}{a_n(t)}$$

Løse system av 1. ord LDE

Gitt systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t),$$

Først finn den generelle løsningen når $\mathbf{g}(t), = \mathbf{0}$
$\mathbf{x_k}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)$
(**komplementær løsning**)

Finn så en hvilken som helst løsning $\mathbf{x}_p(t)$ til systemet
(**partikulær løsning**)

Den generelle løsningen til systemet blir da $\mathbf{x_k}(t) + \mathbf{x}_p(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \mathbf{x}_p(t)$$

Superposisjonsprinsippet

Viss $\mathbf{x}^{(1)}$ og $\mathbf{x}^{(2)}$ er løsninger til $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$,
da er $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ også en løsning for vilkårlige c_1 og c_2.

Fundamentalt sett av løsninger

Viss $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ er lineært uavhengige løsninger til $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, da kan alle løsninger skrives som

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

Om $\mathbf{x} = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$ er en løsning til

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x},$$

da er også $\mathbf{u}(t)$ og $\mathbf{v}(t)$ løsninger.

Abels teorem

Viss $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ er løsninger til $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ i et åpent intervall I, da er

$W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ endten 0 eller aldri forsvinnende. Wronskian kan skrives som

$$W(t) = c\exp\left(\int [p_{11}(t) + \cdots + p_{nn}(t)]dt\right)$$

Hvor c er en vilkårlig konst.

Homogent system med konstante koeffisienter

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

Den reelle **konstante matrisen A** har n egenverdier λ_i med tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$

Egenverdier	**Generell løsning**
Alle n egenverdier ulike og reelle.	$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{\lambda_n t}$
$\mathbf{A}$ er 2×2 og egenverdiene like og reelle $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, med tilhørende egenvektor $\boldsymbol{\xi}$	$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}e^{\lambda t} + c_2(\boldsymbol{\xi}te^{\lambda t} + \boldsymbol{\eta}e^{\lambda t})$ hvor $\boldsymbol{\eta}$ er en **generalisert egenvektor** funnet ved $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}$
Har to komplekse konjugat egenverdier $\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$ med tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ hvor de resterende egenverdiene, $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$, er ulike og reelle	$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t) + c_3\boldsymbol{\xi}^{(3)}e^{\lambda_3 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{\lambda_n t}$ hvor $\mathbf{u}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos(\beta t) - \mathbf{b}\sin(\beta t))$ $\mathbf{v}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a}\sin(\beta t) + \mathbf{b}\cos(\beta t))$

Fundamental matrise

Matrisen hvis kolonner er vektorer som former ett fundamentalt sett med løsninger.

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \left[\mathbf{x}^{(1)}(t) \;\; \mathbf{x}^{(2)}(t) \;\; \cdots \;\; \mathbf{x}^{(n)}(t)\right]$$

Matrisen hvis kolonner er vektorer som former ett fundamentalt sett med løsninger, OG hvor den er lik identitetsmatrisen $\mathbf{I}$ for $t = t_0$ er betegnet med $\boldsymbol{\Phi}(t)$

$$\boldsymbol{\Phi}(t_0) = \mathbf{I}$$

Partikulær løsning via diagonalisering

Fungerer for systemer på formen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t),$$

Hvor $\mathbf{A}$ er en $n \times n$ konstant og diagonaliserbar matrise med egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ og tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$

La $\mathbf{T} = [\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}]$, og $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$. La så $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, som gir

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t), \text{ hvor } \mathbf{h}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)$$

hvor løsningen er $\mathbf{y}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$, hvor

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t} \int e^{-\lambda_i t} h_i(t) dt + c_i e^{\lambda_i t}$$

der c_i er vilkårlige konstanter. Man finner så en partikulær løsning $\mathbf{x}_p(\mathrm{t}) = \mathbf{T}\mathbf{y}(\mathrm{t})$.

Partikulær løsning via ubestemte koeffisientvektorer

Fungerer for systemer på formen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t),$$

Hvor $\mathbf{A}$ er en $n \times n$ konstant matrise med egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ og $\mathbf{g}(t)$ består av eksponent, sinus, cosinus, polynom, eller sum og/eller produkt av slike funksjoner.

$\mathbf{g}(t)$ kan skrives som $\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}^{(1)}(t) + \dots + \mathbf{g}^{(n)}(t)$, hvor hver $\mathbf{g}^{(i)}(t)$ er skrevet som en konstant vektor gange en funksjon av t, og gir det i-ende underproblemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}^{(i)}(t)$$

$\mathbf{g}^{(i)}(t)$	$\mathbf{x}_p^{(i)}(t)$
$P_n(t) = \mathbf{u}^{(0)}t^n + \mathbf{u}^{(1)}t^{n-1} + \dots + \mathbf{u}^{(n)}$	$t^s(\mathbf{a}^{(0)}t^n + \mathbf{a}^{(1)}t^{n-1} + \dots + \mathbf{a}^{(n)})$
$P_n(t)e^{\lambda t}$	$t^s\left(\mathbf{a}^{(0)}t^n + \mathbf{a}^{(1)}t^{n-1} + \dots + \mathbf{a}^{(n)}\right)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}(\mathrm{A}\cos\beta t + \mathrm{B}\sin\beta t)$	$t^s\left(\mathbf{a}^{(0)}t^{n-0} + \dots + \mathbf{a}^{(n)}\right)e^{\alpha t}\cos\beta t$ $+t^s\left(\mathbf{b}^{(0)}t^{n-0} + \dots + \mathbf{b}^{(n)}\right)e^{\alpha t}\sin\beta t$

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}_p^{(1)}(t) + \mathbf{x}_p^{(2)}(t) + \dots + \mathbf{x}_p^{(n)}(t)$$

Partikulær løsning via variasjon av parameter

Fungerer for systemer på formen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$$

Hvor $\mathbf{P}(t)$ og $\mathbf{g}(t)$ er kontinuerlige på ett åpent intervall I. Gitt en fundamental matrise $\boldsymbol{\Psi}(t)$ for the systemet når $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$ har blitt funnet, da er en partikulær løsning til systemet lik

$$\mathbf{x}_p(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\Psi}(t) \int \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t) dt$$

FORMELLE DEFINISJONER AV STABILITET

Stabilt kritisk punkt

Gitt ett autonomt system $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ med kritisk punkt $\mathbf{x}_c$. Da er $\mathbf{x}_c$ stabilt viss

$$\forall t > t_0, \quad \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad :$$
$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_c\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c\| < \epsilon$$

Ustabilt kritisk punkt

Ett kritisk punkt som ikke er stabilt.

Asymptotisk stabilt kritisk punkt

Gitt ett autonomt system $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ med *stabilt* kritisk punkt $\mathbf{x}_c$. Da er $\mathbf{x}_c$ asymptotisk stabilt viss

$$\exists \delta_0 > 0 \quad : \quad \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_c\| < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c\| = 0$$

Mer om vektorfunksjoner og parametriske representasjoner, se winther.io/MAT212

STABILITETSEGENSKAPER og FASEPLAN

Faseplan og faseportrett

Løsningen til $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ hvor $\mathbf{A}$ er 2×2, er en vektor $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

En slik **vektorfunksjon** kan bli sett på som en **parametrisk representasjon** av en kurve i x_1x_2-planet. Dette planet kalles *faseplanet*, og ett sett med kurver i planet kalles ett *faseportrett*.

Kritisk punkt for autonome system

Gitt ett lineært **autonomt** system $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ hvor $\mathbf{A}$ er inverterbar. Så er $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c = \mathbf{0}$ (origo) det **eneste** kritiske punktet

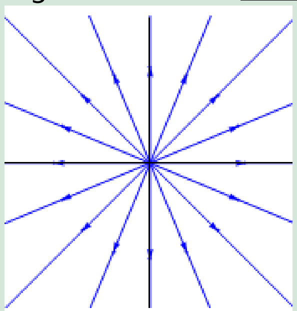
Stabilitetsegenskaper

Gitt ett lineært system $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ hvor $\mathbf{A}$ er 2×2 og inverterbar.

Egenverdier	Kritisk punkt type	Stabilitet
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Node	Ustabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Node	Asymptotisk stabil
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Sadel	Ustabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Ekte eller uekte node	Ustabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Ekte eller uekte node	Asymptotisk stabil
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$		
$\alpha > 0$	Spiral	Ustabil
$\alpha < 0$	Spiral	Asymptotisk stabil
$\alpha = 0$	Senter	Stabil

Ekte vs. Uekte node

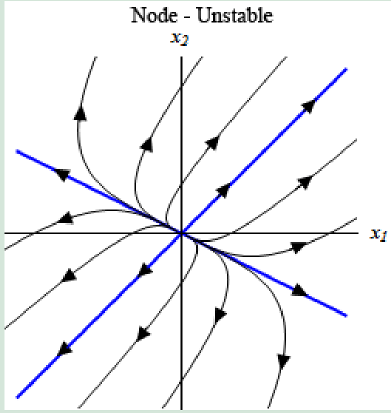
Ekte node (av og til kalt **stjernepunkt**) forekommer når man har sammenfallende egenverdier OG to lineært uavhengige egenvektorer. En uekte node kommer av bare én egenvektor.

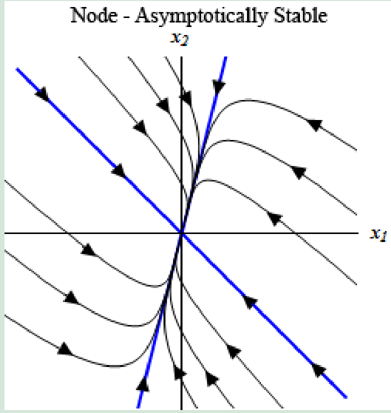


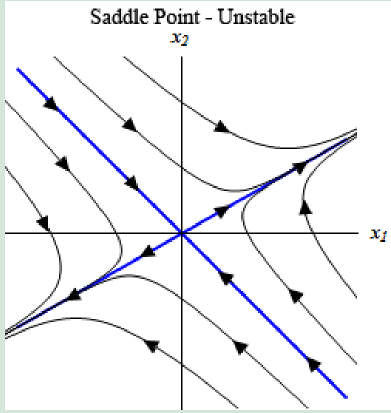
Eksempel på en ustabil ekte node. Banene går utover fra origo hos en ustabil ekte node, og innover hos en stabil ekte node.

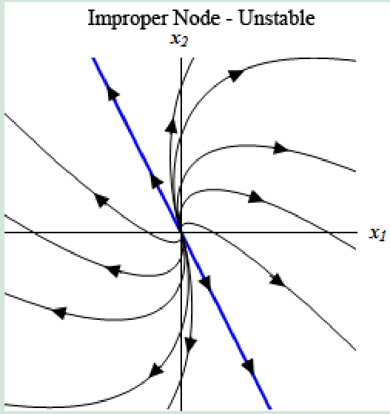
Faseportrett fra METRIC ICL
https://metric.ma.ic.ac.uk/metric_public/

Eksempler på forskjellige faseportrett i faseplanet

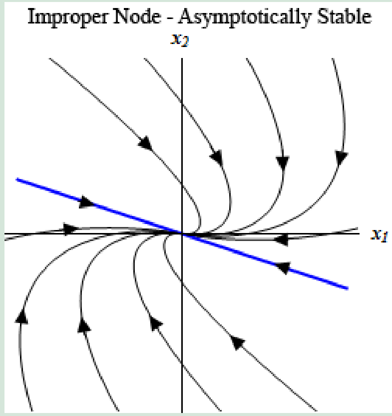


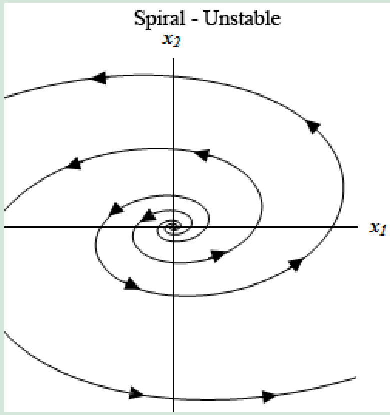


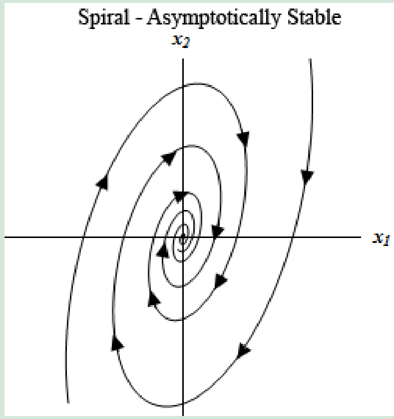


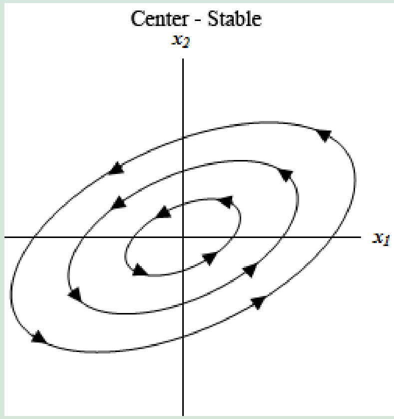


Svarte kurver er noen av løsningskurvene. De blå er retningene til egenvektorene.









Faseportretter av Paul Dawkins © 2003 - 2024
https://tutorial.math.lamar.edu/classes/de/phaseplane.aspx

PERTURBERING og LOKALT LINEÆRE SYSTEM

Perturbere / forstyrre

Gitt ett lineært system $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ hvor $\mathbf{A}$ er 2×2 og inverterbar. Man kan endre systemet *litt* ved å endre koeffisientene i $\mathbf{A}$ *litt*. Dette er **perturbering** av systemet.

Perturbering som endrer stabilitet

Gitt ett lineært system $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ hvor $\mathbf{A}$ er 2×2 og inverterbar, med egenverdier λ_1 og λ_2.

En veldig sensitiv situasjon:

Gitt $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ så er $\mathbf{x}_c = \mathbf{0}$ *stabilt senterpunkt*. Perturberer man systemet slik at $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, da vil
$\alpha < 0 \Rightarrow \mathbf{x}_c = \mathbf{0}$ er *asymptotisk stabilt spiralpunkt*, og
$\alpha > 0 \Rightarrow \mathbf{x}_c = \mathbf{0}$ er *ustabilt spiralpunkt*.

En litt mindre sensitiv situasjon:

Gitt $\lambda_1 = \lambda_2$ så er $\mathbf{x}_c = \mathbf{0}$ en *ekte eller uekte node*. Perturberer man systemet slik at $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, da vil
$\alpha < 0 \Rightarrow \mathbf{x}_c = \mathbf{0}$ er *asymptotisk stabilt spiralpunkt*, og
$\alpha > 0 \Rightarrow \mathbf{x}_c = \mathbf{0}$ er *ustabilt spiralpunkt*.

Andre situasjoner krever større endringer enn perturberinger.

Lokalt- / nesten lineært system

Gitt ett **ikke-lineært** autonomt system $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, hvor $\mathbf{x}_c = \mathbf{0}$ er ett kritisk punkt til systemet.
Anta $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ og at $\mathbf{x}_c = \mathbf{0}$ er et **isolert** kritisk punkt til dette systemet, og at $\mathbf{A}$ er inverterbar. Dette systemet er da lokalt lineært nærme $\mathbf{x}_c = \mathbf{0}$ om $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ er veldig liten der.

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0$$

Isolert kritisk punkt

Ett kritisk punkt som er det eneste kritiske punktet i ett nabolag om punktet.
For eksempel, i planet er ett kritisk punkt isolert om det er en sirkel rundt det hvor det ikke finnes andre kritiske punkter i sirkelen.

Lokalt lineært NDE system

Gitt ett **ikke-lineært** autonomt system $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, hvor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, og $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{bmatrix}$, da er systemet lokalt lineært i nærheten av et kritisk punkt $\mathbf{x}_c = [x_0, y_0]$ når funskjonene F og G har kontinuerlige partiell deriverte opp til 2. orden.

Stabilitetsegenskaper for lokalt lineære system

La λ_1 og λ_2 være egenverdiene til $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ som tilsvarer det lokalt lineære systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$

	Lineært system		**Lokalt lineært system**	
Egenverdier	Kritisk punkt type	Stabilitet	Kritisk punkt type	Stabilitet
$\boldsymbol{\lambda_1 > \lambda_2 > 0}$	Node	Ustabil	Node	Ustabil
$\boldsymbol{\lambda_1 < \lambda_2 < 0}$	Node	Asymptotisk stabil	Node	Asymptotisk stabil
$\boldsymbol{\lambda_2 < 0 < \lambda_1}$	Sadel	Ustabil	Sadel	Ustabil
$\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 > 0}$	Ekte eller uekte node	Ustabil	Node eller spiral	Ustabil
$\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 < 0}$	Ekte eller uekte node	Asymptotisk stabil	Node eller spiral	Asymptotisk stabil
$\boldsymbol{\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta}$				
$\boldsymbol{\alpha > 0}$	Spiral	Ustabil	Spiral	Ustabil
$\boldsymbol{\alpha < 0}$	Spiral	Asymptotisk stabil	Spiral	Asymptotisk stabil
$\boldsymbol{\alpha = 0}$	Senter	Stabil	Senter eller spiral	Ubestemt

RANDVERDIPROBLEM

To-punkts randverdiproblem

En 2. ordens LDE gitt med de to randverdiene for den ukjente funksjonen $y(x)$.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \quad x \in (a, b)$$

Homogen to-punkts randverdiproblem

Ett to-punkts randverdiproblem hvor $y_0 = y_1 = 0$ og

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Egenverdiproblemet og egenfunksjoner

$$y'' + \lambda y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

Egenverdier er verdier av λ som gir ikke-trivielle løsninger.
I dette tilfelle blir de $\lambda_n = \frac{n^2\pi}{L^2}, \quad n = 1,2,3, \ldots$

Egenfunksjoner er ikke-trivielle løsninger $y = y(x)$.
I dette tilfellet blir de $y_n(x) = c \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1,2,3, \ldots$

FOURIER-REKKER

Periodiske funksjoner

En funksjon $f(x)$ med domenet D_f er **periodisk** med en periode $T > 0$ viss $x \in D_f \Rightarrow x + T \in D_f$ og

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

Det følger at nT $(n \in \mathbb{Z})$ er en periode av f, hvor **fundamentalperioden** er den minste verdien av T som oppfyller kravene over.

Lineær komb. av periodiske funk.

Viss $f(x)$ og $g(x)$ har samme periode T, har også

$F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ periode T.

Noen typer konvergens

Gitt $f(x)$ har Fourier-rekken

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$$

hvor $S_N(x)$ kontinuerlig for alle x, da har vi **uniform konvergens** om

$$\max_{\forall x} |f(x) - S_N(x)| \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

eller **konvergens i middel** om

$$\int_{-L}^{L} (f(x) - S_N(x)^2) dx \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Fourier-rekke

En rekkeutvikling av en funksjon ved hjelp av periodiske funksjoner som f.eks. sinus og cosinus.

Fourier Konvergens Teoremet

Gitt f og f' er *delvis kontinuerlige* på intervallet $I: -L \leq x < L$, og at f er definert utenfor I slik at den har periode $2L$. Da har f Fourier-rekken

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$$

hvor

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (n = 0,1,2,\dots)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (n = 1,2,3,\dots)$$

Fourier rekken konverger mot $f(x)$ for alle x hvor f er kontinuerlig,
ellers konvergerer den mot $\frac{1}{2}\left(f(c^+) + f(c^-)\right)$ for alle x hvor f er diskontinuerlig.

$$f(c^+) = \lim_{x\to c^+} f(x) \qquad f(c^-) = \lim_{x\to c^-} f(x)$$

Formlene for a_n og b_n kalles **Euler-Fourier formlene**

Indreprodukt

$$(u, v) = \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx,$$

hvor $u = u(x)$ og $v = v(x)$ integrerbare på intervallet $a \leq x \leq b$

Ortogonalitet

Funksjonene $u = u(x)$ og $v = v(x)$ er **ortogonale** på intervallet $a \leq x \leq b$ viss

$$(u, v) = \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx = 0$$

Gjensidig ortogonalitet

Et sett med funksjoner $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)\}$ er gjensidig ortogonalt over intervallet $a \leq x \leq b$ om alle mulige par av funskjoner i settet er ortogonale.

Noen kjente ortogonale funksjoner

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{viss } m \neq n \\ L, & \text{viss } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{viss } m \neq n \\ L, & \text{viss } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 0$$

Jevn- og odde funksjon

Gitt $f = f(x)$ med domenet D_f hvor $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

$$f(x) = f(-x) \ \ \forall x \in D_f \Rightarrow f \text{ er } \textbf{jevn}$$

$$f(-x) = -f(x) \ \ \forall x \in D_f \Rightarrow f \text{ er } \textbf{odde}$$

Fourier-rekke til jevn funksjon

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Fourier-rekke til odde funksjon

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

JEVNE OG ODDE FUNKSJONER

Egenskaper for jevne og odde funk.

1. Jevn + Jevn = Jevn
2. Odde + Odde = Odde
3. Odde + Jevn ≠ Jevn eller Odde
4. Jevn · Jevn = Jevn
5. Odde · Odde = Jevn
6. Odde · Jevn = Odde
7. f er odde og $f(x)$ definert for $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$
8. $f = f(x)$ er jevn, da er

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

9. $f = f(x)$ er odde, da er

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

EKSEMPLER PÅ LØSNING AV PDE

Varmeledningslikningen for en rett, homogen og solid stang med uniformt tverrsnitt

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad x \in (0, L), \quad t > 0$$

hvor $u(x,t)$ er **temperaturen** ved posisjonen x etter tiden t,
og $\alpha = \frac{\kappa}{\rho s}$ er den **termiske diffusiviteten**,
hvor κ er den termiske ledningsevnen,
ρ massetettheten,
og s den spesifikke varmen til stangen.

$f(x) = u(x,0), \ \ x \in [0, L]$ er den initielle temperatur fordelingen av stangen, og temperaturen på randen er $u(0,t) = u(L,t) = 0$

Løsning av varmeledningslikningen ved seperasjon av variabel

En løsning er $u(x,t) = 0$ om $f(x) = 0$, men denne er ikke interesant og blir ignorert.

Antar $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\Rightarrow \alpha^2 X''T = XT'$$

Separerer så likningen

$$\Leftrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T}$$

For at denne likningen skal vær gyldig i alle punkt (x,t), må begge sider være lik den samme konstanten, $-\lambda$, hvor λ er **seperasjonskonstanten**.

Dette da om f.eks. x ble holdt i ro, mens t endret seg, da ville den ene siden vært konstant, som betyr at den andre siden også må være konstant.

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \alpha^2 \lambda T = 0 \end{cases}$$

Randkravene gir

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad \text{og} \quad u(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

Siden vi ignorerer løsningen hvor $u(x,t) = 0$ så betyr det at vi ignorerer situasjonen hvor $T(t) = 0$, dvs.

$$X(0) = 0 \quad \text{og} \quad x(L) = 0$$

Vi har da egenverdiproblemet

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

som har egenfunksjon

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1,2,3,\dots$$

$$\text{for } \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1,2,3,\dots$$

Bytter ut λ i $T' + \alpha^2\lambda T = 0$ med egenverdien λ_n

$$T' + \alpha^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}T = 0, \quad n = 1,2,3,\dots$$

Som betyr at $T_n(t) = e^{(-n^2\pi^2\alpha^2/L^2)t}, \quad n = 1,2,3,\dots$

Vi får da at

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{(-n^2\pi^2\alpha^2/L^2)t}, \quad n = 1,2,3,\dots$$

Det uendelige settet med funksjonene u_n kalles de **fundamentale løsningene,** og en generell løsning for varmeledningslikningen blir en uendelig lineær kombinasjon av de

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{(-n^2\pi^2\alpha^2/L^2)t}$$

hvor c_n bestemmes basert på *initialkravet*:

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Én-dimensjonal bølgeligning av elastisk strikk strekt mellom to stolper.

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad x \in (0, L), \quad t > 0$$

hvor $u(x,t)$ er **amplituden** ved posisjonen x etter tiden t,
og $a = \frac{T}{\rho}$ er **signalfarten**,
hvor T er trekkraften strikken opplever,
ρ masse per lengdeenhet,

Endene (randen) av strikken står stille:
$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$, og strikken har initiell amplitude funksjon:

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0, L]$$
$$u_t(x,0) = g(x), \quad x \in [0, L]$$

Orden av tid og initiale betingelser

Merk at varmelednings likningen var 1. orden av tid og trenge bare ett initialkrav, mens bølgelikningen var 2. orden av tid og trengte dermed to initialkrav.

Løsning av bølgelikningen ved seperasjon av variabel

Merk at de initiale- og randkravene krever at $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$

Antar $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\Rightarrow a^2 X'' T = XT''$$

Separerer så likningen

$$\Leftrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + a^2 \lambda T = 0 \end{cases}$$

Randkravene gir

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad \text{og} \quad u(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

Situasjonen hvor $T(t) = 0$ er ikke interresant og blir ignorert, derfor har vi at

$$X(0) = 0 \quad \text{og} \quad x(L) = 0$$

Vi har da egenverdiproblemet

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

som har egenfunksjon

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1,2,3, \dots$$

for $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1,2,3, \dots$

Det *andre initialkravet* gir

$$u_t(x,0) = T'(0) = g(0) = 0$$

Bytter ut λ i $T'' + a^2 \lambda T = 0$ med egenverdien λ_n

$$T'' + a^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} T = 0, \quad n = 1,2,3, \dots$$

Som betyr $T_n(t) = k_1 \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$

$$T'(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$$

$\Rightarrow T_n(t) = k_1 \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$ hvor $k_1$vilkårlig. Setter $k_1 = 1$.

Vi får da at

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right), \quad n = 1,2,3, \dots \end{aligned}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$$

Det *første initialkravet* gir

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$