MAT212 SAMMENDRAG

Laget av Augustin Winther

v. 2023-11-12

Gule bokser er definisjoner fra pensum.

Blå bokser er teoremer fra pensum.

Grønne bokser er forsåvidt teoremer, men pensum har ikke kategorisert de som det.

Kan inneholde feil og/eller mangler!

Kontaktinfo for å gi tilbakemeldinger finnes på nettsiden min:

winther.io

TRIG. IDENTITETER

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin(2\theta) = 2\,\sin\theta\,\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

TREKANT ULIKHET

$$|a+b| \le |a| + |b|$$

$$|a-b| \ge |a| - |b|$$

VEKTORFUNKSJONER AV ÉN VARIABEL I ROMMET

Vektorfunksjon i rommet

Posisjon: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

Hastighet: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$

Akselerasjon: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}$

Derivasjon av vektorfunksjoner

La $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, og $\lambda(t)$ være differensierbare.

a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

b) $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$

c) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$

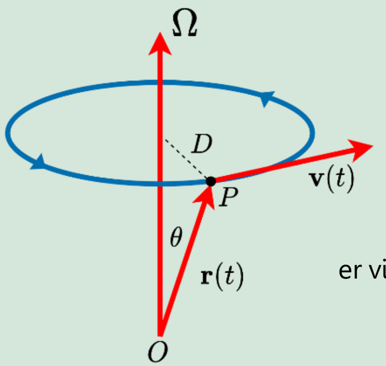
d) $\frac{d}{dt}\big(\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)\big) = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$

e) $\frac{d}{dt}\big(\,\mathbf{u}(\lambda(t))\,\big) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t))$

f) $\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)| = \frac{\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|},\ \ \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$

Sirkuler bevegelse

La $\mathbf{\Omega}$ være vinkelhastigheten.



$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t) = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}(t)$$

Merk at vinkelhastigheten er vinkelrett på sirkelbevegelsen.

Roterende referanse system

La $\mathcal{S} = \{\mathbf{I},\mathbf{J},\mathbf{K}\}$ være et statisk koordinatsystem, og la $\mathcal{R} = \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ være et roterende koordinatsystem hvis origo har posisjons vektor $\mathbf{R}_0$ relativ til $\mathcal{S}$. La vinkelhastigheten til $\mathcal{R}$ relativ til $\mathcal{S}$ være $\mathbf{\Omega}$. La der være et objekt med posisjon $\mathbf{r}$ relativ til $\mathcal{R}$'s origo, og med posisjon $\mathbf{R}$ relativ til $\mathcal{S}'$ origo. Vi har da at objektets hastighet og akselerasjon relativ til $\mathcal{S}'$ origo kan skrives som

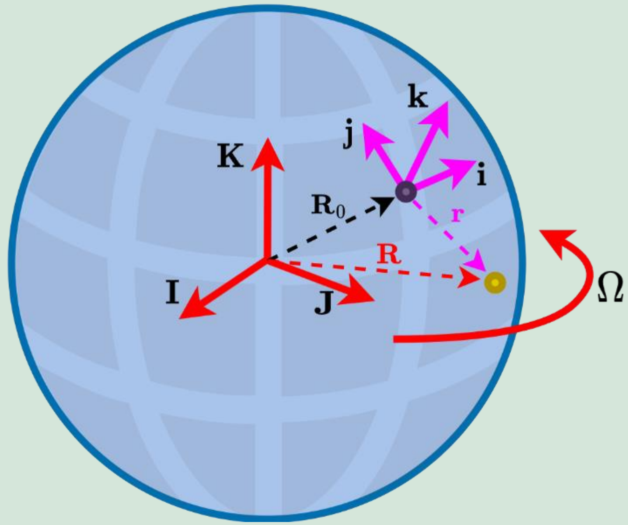
$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v} + \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R})$$

hvor $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ og $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$.

Merk at $2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}$ blir kalt **Coriolis akselerasjon**, og $\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R})$ blir kalt **sentripetal akselerasjon**.

Eksempel med roterende sfære:



Hvor $\{\mathbf{I},\mathbf{J},\mathbf{K}\}$ spenner ut fra sfærens senter, og $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ spenner ut fra et punkt på overflaten av sfæren.

KURVER I ROMMET

Kurve i rommet

En kurve $\mathcal{C}$ er et geometrisk objekt hvis punkter er gitt ved en posisjons vektor funksjon

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Merk: Parameteren t trenger nå ikke representere noe spesielt, som f.eks. tid. Likevel omtaler vi $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ som kurvens hastighet og $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$ som kurvens akselerasjon.

Kurve parametrisering fra skjæring mellom to flater

Gitt to flater $f(x,y,z)$ og $g(x,y,z)$ som skjærer hverandre, så kan man representere skjæringskurven $\mathcal{C}$ ved parametrisering.

Det finnes ikke én riktig måte å gjøre det på, men viss én flate er uavhengig av én variabel kan man først parametrisere den for å så parametrisere den andre. Om begge flatene er avhengig av alle variablene kan man prøve å trekke ifra den ene flaten fra den andre, eller vice versa, for å få et utrykk uavhengig av én variabel. Merk at det finnes mange måter å parametrisere på, det er ingen unik fasit.

Bue lengde

Viss $\mathbf{r}(t)$ har en kontinuerlig derivert $\mathbf{v}(t)$, da er lengden til kurven $\mathcal{C}$ fra $t = a$ til $t = b$ lik

$$s = \int_a^b v(t)dt$$

Derimot om $\mathbf{v}(t)$ er *stykkevis kontinuerlig*, da sier man at kurven er **stykkevis jevn**, og lengden blir summen av lengdene til de jevne kurvdelene.

Bue lengde parametrisering

Kurvens posisjons vektor $\mathbf{r}$ er gitt ved bue lengde $s(t)$

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(t))$$

La $\kappa > 0$ på et intervall som inneholder s. La $\Delta\theta$ være vinklenen mellom $\hat{\mathbf{T}}(s + \Delta s)$ og $\hat{\mathbf{T}}(s)$. Da har vi at

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

Enhet tangent

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$$

$$\hat{\mathbf{T}}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Kurvatur

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right|$$

Kurvatur radius

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

Enhet normal

$$\hat{\mathbf{N}}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}$$

Enhet binormal

$$\hat{\mathbf{B}}(s) = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}$$

Fundamental teoremet for romkurver

La $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ være kurver i rommet med samme ikke-forsvinnende kurvatur $\kappa(s)$ og samme vridning $\tau(s)$. Da er kurvene **kongruent**.

Det vil si at en kurve kan bli *flyttet* og/eller *rotert* slik at den faller nøyaktig sammen med den andre.

Frenet-Serret formlene

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{N}}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{N}}}{ds} = -\kappa\hat{\mathbf{T}} + \tau\hat{\mathbf{B}}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{N}}$$

Hva forteller $\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}}$, og $\hat{\mathbf{B}}$ oss?

Gitt et punkt $\mathbf{r}(s)$ på en kurve $\mathcal{C}$, så har vektorene $\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}}$, og $\hat{\mathbf{B}}$ halene sine i det punktet.

$\hat{\mathbf{T}}$ peker i retningen kurven vokser.

$\hat{\mathbf{N}}$ peker i retningen kurven svinger.

Planet utstrakt av $\hat{\mathbf{T}}$ og $\hat{\mathbf{N}}$ kalles **oskuleringsplanet/smygplanet.**

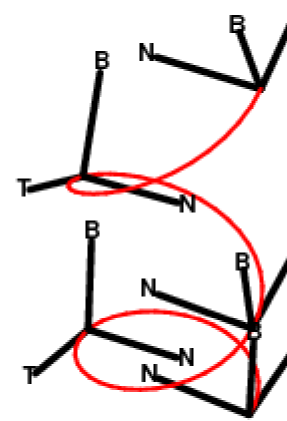
$\hat{\mathbf{B}}$ peker normalt ut av smygplanet. (Bruk høyrehånds regel)

Basisen definert av $\{\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{B}}\}$ kalles **Frenet systemet** til $\mathcal{C}$ ved punktet $\mathbf{r}(s)$.

Vridning

Vridningen $\tau(s)$ måler i hvilken grad kurven ikke klarer å være plan.

$$\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds} = -\tau(s)\hat{\mathbf{N}}(s)$$



[1]

Generalisert kurvatur og vridning

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{v}}{v} \qquad \hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} \qquad \kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3}$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{v\kappa}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{\rho}{v}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\right|$$

$$\tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot (d\mathbf{a}/dt)}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}$$

Polar hastighet og akselerasjon

Gitt en kurve i planet. Da er

$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\ \mathbf{i} + \sin\theta\ \mathbf{j}$, og

$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j}$.

Man har da at

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

PARTIELL DERIVASJON

Partiell derivert

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = f_i(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\dots,x_i+h,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}{h}$$

Høyere ordens partielle derivasjon

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j\dots,x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j\dots,x_n) = f_{ji}(x,y)$$

For høyere orden enn 2 kan man utvide denne metoden på den åpenbare måten.

Retningsderivert

La $\mathbf{u}$ være en enhetsvektor. Den retningsderiverte i retning $\mathbf{u}$ er

$$D_{\mathbf{u}} f(x_1,\dots,x_n) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_1+hu_1,\dots,x_n+hu_2) - f(x_1,\dots,x_n)}{h}$$

Kjerneregel versjon 1

$$f = f(x_1(t),\dots,x_n(t))$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

Kjerneregel versjon 2

$$f = f(x_1(t_1,\dots,t_i,\dots,t_m),\dots,x_n(t_1,\dots,t_i,\dots,t_m))$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

Gradient

$$\nabla f(x_1,\dots,x_n) = f_1(x_1,\dots,x_n)\mathbf{e}_1 + \cdots + f_n(x_1,\dots,x_n)\mathbf{e}_n$$

f deriverbar i P og $|\mathbf{u}| = 1$

$$\Longrightarrow D_{\mathbf{u}} f(P) = \mathbf{u}\cdot\nabla f(P)$$

To **blandede partiell deriverte** av n-te orden av en funksjon f er like ved et punkt P viss de to blandede partiell deriverte er kontinuerlige ved P, og viss f og alle dens partiell deriverte av ordre mindre n er kontinuerlige i et område rundt P.

f øker mest i retning ∇f med $|\nabla f|$

f minker mest i retning $-\nabla f$ med $|\nabla f|$

f deriverbar i (a,b) og $\nabla f(a,b) \neq \mathbf{0}$

$\Rightarrow$ $\nabla f(a,b)$ **normal vektor** til nivåkurven til f i (a,b)

Relativ endringshastigheten

Endringshastigheten $D_{\mathbf{v}} f(x_1,\dots,x_n)$ til $f(x_1,\dots,x_n)$ ved $(a_1,\dots,a_n)$, målt av en observatør i $(a_1,\dots,a_n)$ med hastighet $\mathbf{v}$ er gitt ved

$$D_{\mathbf{v}} f(x_1,\dots,x_n) = \mathbf{v}\cdot\nabla f(a_1,\dots,a_n)$$

Merk at $\mathbf{v}$ må ikke nødvendigvis være en enhetsvektor

Differensial

Gitt de første partiell deriverte for en funksjon $f(x_1,\dots,x_n)$ eksisterer ved et punkt, da har vi at differensialen til funksjonen df er

$$df = f_1(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)dx_1 + \cdots + f_n(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)dx_n$$

Laplace formelen

En to-variabel funksjon er **harmonisk** i et område i rommet om den tilfredsstiller

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Normal til $z = f(x,y)$ ved $(a,b,f(a,b))$

$$\mathbf{n} = f_1(a,b)\mathbf{i} + f_2(a,b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Tangentplan til $z = f(x,y)$ ved $(a,b,f(a,b))$

$$z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$$

Man kan **approksimere** verdien til en to-variabel funksjon i nærheten av et punkt (a,b) ved å bruke verdien til *tangentplanet* i det punktet (**Linearisering**)

Del/nabla operatoren ∇

I det kartesiske koordinatsystemet $\mathbb{R}^n$ med koordinater $(x_1,\dots,x_n)$ og standard basis $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ da er del operatoren definert som

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Differensiering gjennom et integral

Gitt for alle $x \in (c,d)$ så holder følgende

(1) $\int_a^b f(x,t)dt$ og $\int_a^b f_1(x,t)dt$ eksisterer, og

(2) $|f_{11}(x,t)| \leq g(t)$

hvor $t \in (a,b)$ og $\int_a^b g(t)dt = K < \infty$

Da, for alle $x \in (c,d)$, har vi at

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

Gitt $a(x)$ og $b(x)$ begge deriverbare og $a(x) \in [a,b]$ og $b(x) \in [a,b]$ $\forall x \in (c,d)$

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$$

$$= \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt + f\big(x,b(x)\big)b'(x) - f\big(x,a(x)\big)a'(x)$$

FUNKSJONER AV FLERE VARIABLER

Reell funksjon

En funksjon f av n reelle variabler gir *ett unikt reelt nummer* $f(x_1, \dots, x_n)$ for hvert punkt $(x_1, \dots, x_n)$ i domenet til funksjonen $\mathcal{D}_f$ som er en delmengde av $\mathbb{R}^n$.

Grenseverdi

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = L, \text{ gitt at}$$

$(a_1, \dots, a_n)$ er ikke isolert, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_f$, og

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{s.a.} \quad 0 < \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x_1, \dots, x_n) - L| < \epsilon$$

Viss en funksjon $f(x_1, \dots, x_n)$ har ulike grenseverdier for ulike retninger inn mot $(a_1, \dots, a_n)$, da eksisterer ikke grenseverdien i punktet $(a_1, \dots, a_n)$.

Nivåkurver

Gitt en to variabel funksjon $f(x, y)$, da er en nivåkurve av f gitt som likningen $f(x, y) = C$ hvor C er en konstant. Tegner man opp mange nivåkurver kan man visualisere funksjonen i planet i stedet for rommet. Tenkt topografiske kart.

Lignende for **nivåflater** hvor man har $g(x, y, z) = K$

Kontinuitet i punkt

En funksjon $f(x_1, \dots, x_n)$ er kontinuerlig i punktet $(a_1, \dots, a_n)$ viss

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n)$$

Homogen funksjon

En funksjon $f(x_1, \dots, x_n)$ er positivt homogen av k-te orden viss for hvert punkt $(x_1, \dots, x_n)$ i $\mathcal{D}_f$ og for hvert reelle tall $t > 0$ så er

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n)$$

Eulers teorem

Viss $f(x_1, \dots, x_n)$ har kontinuerlig første partiell deriverte og er positivt homogen av k-te orden, da

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x_1, \dots, x_n) = kf(x_1, \dots, x_n)$$

Deriverbarhet

En funksjon $f(x_1, \dots, x_n)$ er deriverbar i et punkt $(a_1, \dots, a_n)$ viss

$$\lim_{(h_1,\dots,h_n)\to(0,\dots,0)} \frac{f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) - h_1 f_1(a_1, \dots, a_n) - \cdots - h_n f_n(a_1, \dots, a_n)}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}} = 0$$

IMPLISITTE FUNKSJONER

Implisitt funksjon

En implisitt funksjon er definert av en **implisitt ligning**

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Eksempel: $x^2 + y - 1 = 0$ definerer y som en implisitt funksjon av x

Implisitt ligning system (eks.)

Gitt det implisitte ligningssystemet $\begin{cases} F(x,y,z,w) = 0 \\ G(x,y,z,w) = 0 \end{cases}$, så kan man forvente seks ulike implisitte funksjons systemer som mulige løsninger, alt etter hva man vil:

$$\begin{cases} x = x(z,w) \\ y = y(z,w) \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(y,w) \\ z = z(y,w) \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(y,z) \\ w = w(y,z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = y(x,w) \\ z = z(x,w) \end{cases} \quad \begin{cases} y = y(x,z) \\ w = w(x,z) \end{cases} \quad \begin{cases} z = z(x,y) \\ w = w(x,y) \end{cases}$$

Approksimasjon av implisitte funksjoner

Viss en implisitt ligning $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ inneholder bare jevne funksjoner, så vil en løsning til en implisitt funksjon fra den implisitte ligningen ha et **Taylor-polynom**. *Se Taylors teorem under*

Konstant variabel notasjon (eks.)

Gitt et implisitt ligningssystem $\begin{cases} F(x,y,z,w) = 0 \\ G(x,y,z,w) = 0 \end{cases}$, så impliserer notasjonen $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$ at x er tenkt som en funksjon av z og w, og at w skal være tenkes som konstant under partiell deriveringen. En slik notasjon impliserer også videre at den gjenværende variabelen y er også tenkt til å være en funksjon av z og w. Med andre ord:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w \Rightarrow \begin{cases} x = x(z,w) \\ y = y(z,w) \end{cases}$$

Viktigste fra implisitt funksjons teorem

Om Jacobian determinanten til et implisitt ligningssystem med hensyn på noen valgte avhengige variabler ikke er 0 nær et punkt P, da kan du skrive de valgte avhengige variablene som funksjoner av de uavhengige variablene.

MERK! Alle F i de implisitte ligningene må ha kontinuerlig første partiell derivert med hensyn til hver variabel nær P.

Jacobian determinanten

Jacobian determinanten til $F(x_1, \dots, x_n)$ og $G(x_1, \dots, x_n)$ men hensyn til variablene x_i og x_j er

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x_i,x_j)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_i} & \frac{\partial F}{\partial x_j} \\ \frac{\partial G}{\partial x_i} & \frac{\partial G}{\partial x_j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_i & f_j \\ G_i & G_j \end{vmatrix}$$

Definisjonen kan bli utvidet til n funksjoner og variabler på den åpenbare måten.

Implisitt funksjons teorem

Gitt et implisitt ligningssystem av n ligninger med $n+m$ variabler,

$$\begin{cases} F_{(1)}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ F_{(n)}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases},$$

og et punkt $P_0 = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots b_n)$ som oppfyller systemet.

Gitt at hver implisitt ligning $F_{(i)}$ har en kontinuerlig første partiell derivert med hensyn til hver variabel x_j og y_k nær P_0, og gitt at Jacobian determinanten ikke null ved P_0

$$\left.\frac{\partial(F_{(1)}, \dots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \dots y_n)}\right|_{P_0} \neq 0,$$

da kan systemet bli løst for $y_1, \dots, y_n$ som funksjoner av $x_1, \dots, x_m$ nær P_0. Det vil si det finns funksjoner

$$\phi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \phi_n(x_1, \dots, x_m)$$

slik at $\phi_j(a_1, \dots, a_m) = b_j$. Mer har man at

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m} = -\frac{\dfrac{\partial(F_{(1)}, \dots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \dots, x_j, \dots y_n)}}{\dfrac{\partial(F_{(1)}, \dots, F_{(n)})}{\partial(y_1, \dots, y_i, \dots y_n)}}$$

Taylors teorem

La $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ tilhøre $\mathbb{R}^n$. Viss f er en funksjon av $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ som har kontinuerlige partiell deriverte opp til en ordre av $m+1$ i en åpen mengde som inneholder linjestykket som kobler $\mathbf{a}$ og $\mathbf{x}$, da har vi at Taylors formel for f om $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ er

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{m} \frac{[(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \cdot \nabla]^j f(\mathbf{a})}{j!} + \frac{[(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \cdot \nabla]^{m+1} f(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x}-\mathbf{a}))}{(m+1)!} = P_m(\mathbf{x}) + R_m(\mathbf{x}, \theta)$$

hvor $0 < \theta < 1$, og ∇ er del operatoren. En approksimasjon for $f(\mathbf{x})$ om $\mathbf{a}$ vil være Taylor polynomet selv, dvs. $f(\mathbf{x}) \approx P_m(\mathbf{x})$

$P_m(\mathbf{x})$ er **Taylor polynomet** av m-te grad for f om $\mathbf{x} = \mathbf{a}$.
$R_m(\mathbf{x}, \theta)$ er **Lagrange resten** for f om $\mathbf{x} = \mathbf{a}$.

Gitt $S \subseteq \mathbb{R}^n$ er åpent og alle k-ordens partiell deriverte til $f: S \to \mathbb{R}^n$ eksisterer og er kontinuerlige på hele S. Da er f en C^k funksjon.

Invers funksjons teorem

Gitt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er en C^1 funksjon på en åpen mengde som inneholder $\mathbf{a}$, og Jacobian determinanten til f på $\mathbf{a}$ er ikke null. Da finnes det en åpen mengde V som inneholder $\mathbf{a}$, og en åpen mengde W som inneholder $f(\mathbf{a})$ slik at $f: V \to W$ har en kont. invers $f^{-1}: W \to V$ som er differensierbar for alle $\mathbf{b} \in W$

DOBBEL INTEGRAL

Dobbel integral

Viss $f(x,y)$ er definert og begrenset på domenet D, la $\hat{f}$ være utvidelsen av f som er null overalt utenfor D

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{viss } (x,y) \in D \\ 0, & \text{viss } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Viss D er begrenset, da kan det være innesluttet av et rektangel R med sider parallelt med koordinataksene. Viss $\hat{f}$ er integrerbar over R, da er f integrerbar over D og vi definerer dobbelintegralet som

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R \hat{f}(x,y)dA$$

Viss f er kontinuerlig på et lukket og begrenset intervall D hvis grenser består av endelig mange kurver av endelig lengde, da er f integrerbar over D. **Gjelder også for trippelintegral**

Iterasjon av dobbelintegral

Viss $f(x,y)$ er kontinuerlig på et begrenset y-enkelt domene D gitt ved $x \in [a,b]$ og $y \in [c(x), d(x)]$, da har vi at

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy$$

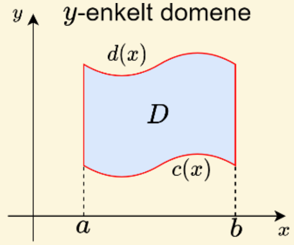
Viss $f(x,y)$ er kontinuerlig på et begrenset x-enkelt domene D gitt ved $y \in [c,d]$ og $x \in [a(y), b(y)]$, da har vi at

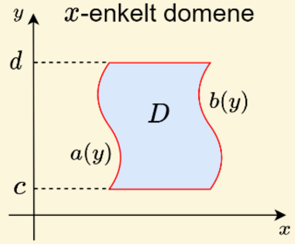
$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$$

x- og y-enkle domener

Et domene D i xy-planet er **y-enkelt** viss det er begrenset av to vertikale linjer $x = a$ og $x = b$ og to kontinuerlige grafer $y = c(x)$ og $y = d(x)$.

Et domene D i xy-planet er **x-enkelt** viss det er begrenset av to horisontale linjer $y = c$ og $y = d$ og to kontinuerlige grafer $x = a(y)$ og $x = b(y)$.



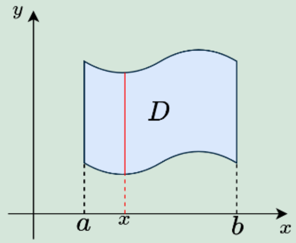


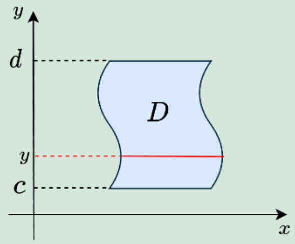
Merk at om domenet D er verken x- eller y-enkelt, så kan man dele domenet opp i x- og eller y-enkle deldomener.

Iterasjonsretning

Man pleier ofte å illustrere domenet man integrerer over. Ved iterasjon av dobbelintegral legger man til en solid linje på domenet for å illustrere iterasjonsretning.

Den **vertikale** solide røde linjen gjennom D indikerer iterasjon med indre integral i y-retning





Den **horisontale** solide røde linjen gjennom D indikerer iterasjon med indre integral i x-retning

I flere tilfeller er det enklere å først konvertere dobbel integral situasjonen til **polare koordinater**.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad r^2 = x^2 + y^2 \qquad dA = dxdy = r\,dr\,d\theta$$

En middelverdisetning for dobbel integral

Viss $f(x,y)$ er kontinuerlig på et lukket og begrenset domene D i xy-planet, da eksiterer det et punkt (x_0, y_0) i D slik at

$$\iint_D f(x,y)dA = f(x_0, y_0) \cdot \{\text{arealet til } D\}$$

Middelverdi

Gjennomsnittlig verdi eller middelverdi for en integrerbar funksjon $f(x,y)$ over et domene D er

$$\bar{f} = \frac{1}{\{\text{arealet til } D\}} \iint_D f(x,y)dA$$

Variabelbytte formel for dobbel integral

La $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ være en én-til-én transformasjon fra domenet S i uv-planet til domenet D i xy-planet. Gitt x, y og deres første partiell deriverte er kontinuerlige i S, og $f(x,y)$ er integrerbar over D, da er $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ integrerbar over S og

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_S g(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Den **inverse transformasjonen** ville vært

$$u = u(x,y) \qquad v = v(x,y)$$

TRIPPEL INTEGRAL og ANDRE ROMKOORDINATER

Trippel integral

Viss $f(x,y,z)$ er definert og begrenset på domenet D, la $\hat{f}$ være utvidelsen av f som er null overalt utenfor D

$$\hat{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & \text{viss } (x,y,z) \in D \\ 0, & \text{viss } (x,y,z) \notin D \end{cases}$$

Viss D er begrenset, da kan det være innesluttet av en boks B med sidelengder parallelt med koordinataksene. Viss $\hat{f}$ er integrerbar over B, da er f integrerbar over D og vi definerer trippelintegralet som

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iiint_B \hat{f}(x,y,z)dV$$

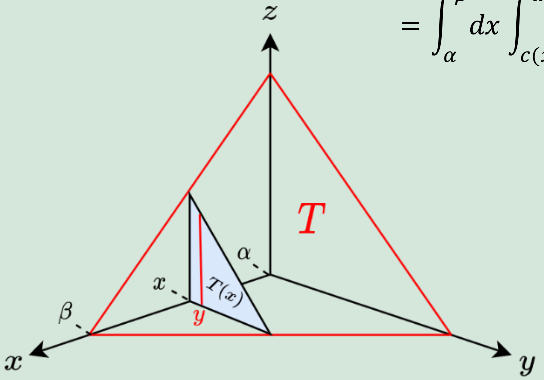
Iterasjon av trippelintegral

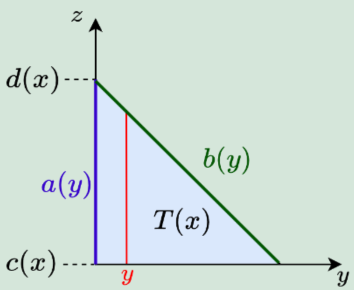
Man deler D oppi i plan parallelt til en av koordinat planene, så gjør man iterasjon av dobbelintegral over dette planet, og så integrerer man resultatet med hensyn på den siste variabelen.

Eksempel med tetraedron:

Her har vi delt $D = T$ opp i plan parallelt med yz-planet. Vi får et domene $T(x)$ å gjøre iterasjon av dobbelt integral over.

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \int_\alpha^\beta dx \iint_{T(x)} f(x,y,z)dA$$
$$= \int_\alpha^\beta dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y,z)dz$$





Merk at T er *domenet* vi integrerer over. På samme måte som at et dobbeltintegral av en positiv funksjon kan tenkes som et volum i rommet, så kan et trippelintegral av en positiv funksjon tenkes som et hypervolum i det 4-dimensjonale rommet.

Variabelbytte formel for trippel integral

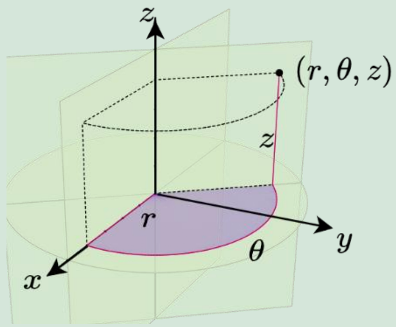
La $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ være en én-til-én transformasjon fra domenet S i uvw-planet til domenet D i xyz-planet. Gitt x, y, z og deres første partiell deriverte er kontinuerlige i S, og $f(x,y,z)$ er integrerbar over D, da er $g(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ integrerbar over S og

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_S g(u,v)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Sylindriske koordinater

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

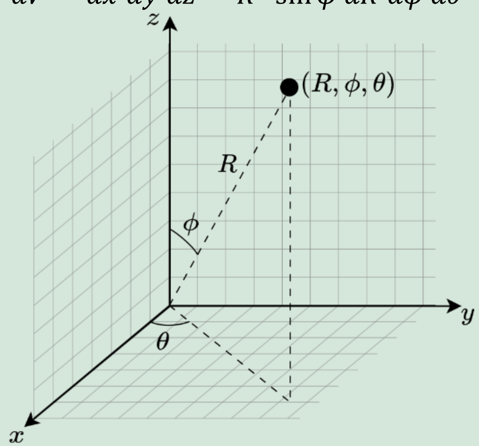
$$dV = dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$



Sfæriske koordinater

$$x = R\sin\phi\cos\theta \qquad y = R\sin\phi\sin\theta \qquad z = R\cos\phi \qquad R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$dV = dx\,dy\,dz = R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta$$



VEKTORFELT

Vektorfelt

En funksjon $\mathbf{F}(x, y, z)$ hvis definisjonsmengde og verdimengde er delmengder av rommet $\mathbb{R}^3$ kalles et vektorfelt.

Et vektorfelt $\mathbf{F}$ assosierer en vektor $\mathbf{F}(x, y, z)$ med alle punkter (x, y, z) i sin definisjonsmengde.

De tre komponentene til $\mathbf{F}$ er reelle skalare funksjoner

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

Viktig! Subscriptene 1, 2 og 3 representer **komponentene** til vektoren, **ikke** partiell deriverte!

Vektorfelt i polare koordinater

Et vektorfelt $\mathbf{F}$ i planet $\mathbb{R}^2$ kan blir utrykt med polarkoordinater

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \theta) = F_r(r, \theta)\hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r, \theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$$

Merk at $\hat{\mathbf{r}}$ og $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ er ikke definer i origo

F_r kalles **radiell komponenten** til $\mathbf{F}$, og F_θ kalles **transversel komponenten**

Alle feltlinjer tilfredsstiller $\frac{dr}{F_r(r,\theta)} = \frac{r\,d\theta}{F_\theta(r,\theta)}$

Konservative vektorfelt

Viss $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$ på et domene D, da er $\mathbf{F}$ er konservativt vektor felt i D, og vi kaller ϕ et **skalar potensial** for $\mathbf{F}$ på D.

Skalarfelt

En skalar funksjon $F(\mathbf{r})$ av en vektor variabel $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x, y, z)$ kalles et skalarfelt.

Merk at komponentene til et vektorfelt er skalarfelt.

Jevnt vektorfelt

Et vektorfelt er jevnt viss alle komponentskalarfeltene har kontinuerlig partiell deriverte av alle ordrer.

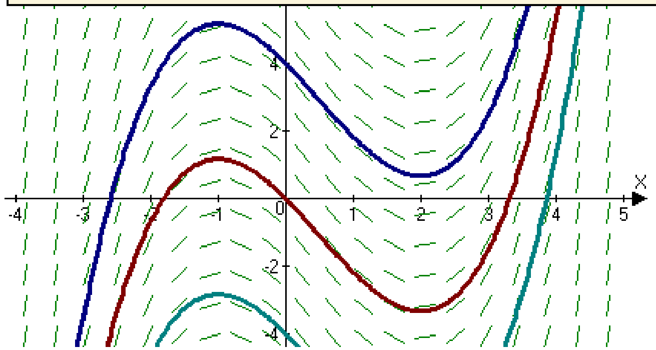
Feltlinjer *(integral kurver, baner, strømlinjer)*

Feltlinjen $\mathbf{r}(t)$ er en feltlinje til $\mathbf{F}$ viss den er løsningen til

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

Alle feltlinjer vil da tilfredsstille følgende likning

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$$



Eksempel på plant vektorfelt hvor de solide linjene illustrerer feltlinjer

Nødvendig betingelser for konservativ vektorfelt

Viss $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ er et konservativt vektorfelt på et domene D i **planet**, da må følgende betingelse tilfredsstilles på hele D

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Viss $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ er et konservativt vektorfelt på et domene D i **rommet**, da må følgende betingelser tilfredsstilles på hele D

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Ekvipotensial flate og kurver

Viss $\phi(x, y, z)$ er en potensial funksjon for det konservative vektorfeltet $\mathbf{F}$, da er *nivåplanene* $\phi(x, y, z) = C$ til ϕ kalt ekvipotensiale flater.

Lignende har vi at *nivåkurvene* for en potensial funksjon for vektorfelt i planet er kalt ekvipotensiale kurver. Ekvipotensiale kurver krysser normalt på feltlinjene.

Kilder, synker, dipoler

En **kilde** i et vektorfelt er et punkt eller område hvor vektorene peker utover.

En **sink** i et vektorfelt er et punkt elle område hvor vektorene peker innover.

En **dipol** består av en kilde og en sink hvor vektorene peker fra kilden til sinken.

LINJEINTEGRAL

Linjeintegral for skalarfelt

For et skalarfelt F med definisjonsmengde D, så er linjeintegralet langs en jevn kurve $\mathcal{C} \subset D$

$$\int_{\mathcal{C}} F(\mathbf{r}(t))ds = \int_a^b F\big(\mathbf{r}(t)\big)\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$$

hvor $t \in [a, b]$, og $\mathbf{r}(a)$ og $\mathbf{r}(b)$ er endepunktene til $\mathcal{C}$

Linjeintegral for vektorfelt

For et vektorfelt $\mathbf{F}$ med definisjonsmengde D, så er linjeintegralet langs en jevn kurve $\mathcal{C} \subset D$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

hvor $t \in [a, b]$, og $\mathbf{r}(a)$ og $\mathbf{r}(b)$ er endepunktene til $\mathcal{C}$

Viss $\mathbf{F} = \nabla\phi$, og $\mathcal{C}$ går fra P_0 til P_1, da

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_0}^{P_1} d\phi = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

Enkel lukket kurve

En lukket kurve er enkel lukket viss den ikke krysser seg selv utenom i endepunktene. F.eks. en sirkel.

Koblet domene

Et domene D er koblet viss hvert par av punkter P og Q i D kan bli koblet sammen av en stykkevis jevn kurve i D.

Enkelt koblet domene

Et enkelt koblet domene D er et koblet domene der alle enkle lukkede kurver kan kontinuerlig krympes til et punkt i D uten at noen del av kurven kommer utfor D.

Sti uavhengighet

La D være et åpent koblet domene og la $\mathbf{F}$ være et jevnt vektorfelt definert på D. Da er de følgende utsagnene <u>ekvivalente</u>

a) $\mathbf{F}$ er konservativt på D

b) $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ for hver stykkevis jevn kurve $\mathcal{C}$ i D.

c) Gitt hvilke som helst to punkt P_0 og P_1 i D, da har $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ samme verdi for alle stykkevis jevne kurver i D som starter i P_0 og slutter i P_1.

FLATEINTEGRAL

Parametrisk flate

En parametrisk flate $\mathcal{S}$ i rommet er en kontinuerlig funksjon $\mathbf{r}$ definert på et koblet, lukket og begrenset domene D i uv-planet med verdier i rommet lik

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \qquad (u,v) \text{ i } D$$

Verdimengden av $\mathbf{r}(u,v)$ blir tenkt på som den parametriske flaten.

Jevn flate

En flate er en jevn flate viss det for hvert punkt på flaten (utenom på grensen av flaten) eksisterer et veldefinert tangentplan. Det vil si at lokalt så virker flaten plan.

Flateintegral for skalarfelt

For et skalarfelt F definert på en jevn flate $\mathcal{S}$ i rommet, hvor $\mathcal{S}$ er parametrisert av funksjonen $\mathbf{r}(u,v)$ definert på D i uv-planet, så er flateintegralet gitt ved

$$\iint_{\mathcal{S}} F d\mathcal{S} = \iint_R F\big(\mathbf{r}(u,v)\big) \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\, dv$$

hvor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathbf{k}$$

Flateintegral for vektorfelt (fluks integral)

For et vektorfelt $\mathbf{F}$ definert på en jevn flate $\mathcal{S}$ i rommet, hvor $\mathcal{S}$ er parametrisert av funksjonen $\mathbf{r}(u,v)$ definert på D i uv-planet, så er flateintegralet gitt ved

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\mathcal{S}} = \pm \iint_{\boldsymbol{\mathcal{S}}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} = \pm \iint_D \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(u,v)\big) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du\, dv$$

Merk at normalen til $d\boldsymbol{\mathcal{S}}$ er $\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, og $d\boldsymbol{\mathcal{S}} = \hat{\mathbf{N}} d\mathcal{S} = \pm \mathbf{n} d\mathcal{S}$

Orienterte flater

En jevn flate $\mathcal{S}$ i rommet er **orienterbar** om det eksisterer et enhets vektorfelt $\hat{\mathbf{N}}(P)$ definert på $\mathcal{S}$ som varierer kontinuerlig mens P varierer over $\mathcal{S}$ og som er ortogonal på $\mathcal{S}$ over alt. For en flate definert ved $G(x,y,z) = 0$

$$\hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{\nabla G(x,y,z)}{|\nabla G(x,y,z)|}$$

Flateelement $d\mathcal{S}$ uten parameteriserng

Viss en flate har én-til-én projeksjon på et område i xy-planet da er flatelementet

$$d\mathcal{S} = \left|\frac{1}{\cos\gamma}\right| dxdy = \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|} dxdy$$

hvor γ er vinkelen mellom normalvektoren $\mathbf{n}$ på $d\mathcal{S}$ og positiv z-akse $\mathbf{k}$.

Merk at om et var snakk om én-til-én projeksjon på xz- eller yz-planet så byttes $\mathbf{k}$ henholdsvis med $\mathbf{j}$ og $\mathbf{i}$, i tillegg til differensialene $dxdy$.

Gitt en flate $\mathcal{S}$ med likning $G(x,y,z) = 0$. Viss G har kontinuerlige første partiell deriverte hvor alle ikke forsvinner på et punkt (x,y,z) på $\mathcal{S}$, og $\mathcal{S}$ har én-til-én projeksjon på et område i xy-planet da har vi at

$$d\mathcal{S} = \left|\frac{\nabla G(x,y,z)}{G_3(x,y,z)}\right| dxdy$$

Merk at her så betyr subscript 3 i G_3 partiell derivert med hensyn på z.

Merk også at om det var snakk om én-til-én projeksjon på xz- eller yz-planet så byttes G_3 henholdsvis med G_2 og G_1, i tillegg til differensialene.

For vektorfelt må man huske at $d\boldsymbol{\mathcal{S}} = \hat{\mathbf{N}} d\mathcal{S}$, og at $\hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$

$$d\boldsymbol{\mathcal{S}} = \hat{\mathbf{N}} d\mathcal{S} = \pm \frac{\nabla G(x,y,z)}{G_3(x,y,z)} dxdy$$

VEKTOR KALKULUS

Gradient, divergens og curl i rommet

$$\textbf{grad}\,\phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\textbf{div}\,\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\textbf{curl}\,\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Gradienten forteller oss hvor fort og i hvilken retning et *skalarfelt* endrer seg raskest i et gitt punkt.

Divergensen forteller oss hvor fort et vektorfelt divergerer bort fra et punkt, altså hvor sterkt vektorene peker bort fra punktet.

Curl forteller oss hvor mye et vektorfelt krummer/virvler/krøller seg rundt et punkt.

Divergens som fluksstetthet

Viss $\hat{\mathbf{N}}$ er utover enhets normalen på en sfære $\mathcal{S}_\epsilon$ med radius ϵ og sentrum i punktet P, og viss $\mathbf{F}$ er ett jevnt vektorfelt i rommet, da

$$\nabla\cdot\mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon\to0^+}\frac{3}{4\pi\epsilon^3}\oiint_{\mathcal{S}_\epsilon}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\mathcal{S}_\epsilon$$

Curl som sirkulasjonstetthet

Viss $\mathbf{F}$ er et jevnt vektorfelt og $\mathcal{C}_\epsilon$ er en sirkel med radius ϵ med sentrum i punktet P og som omringer en disk $\mathcal{S}_\epsilon$ med enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$, da

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{1}{\pi\epsilon^2}\oint_{\mathcal{C}_\epsilon}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{N}}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}(P))$$

Den **<u>lokale vinkel hastigheten</u>** $\boldsymbol{\Omega}$ ved et punkt P i en væske (gass eller flytende materie) med hastighets felt $\mathbf{v}(P)$ er gitt ved

$$\boldsymbol{\Omega}(P) = \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}(P)$$

Dirac-fordeling

For alle jevne funksjoner $f(x)$ definert på et domene som inneholder (a,b), så har vi at Dirac-fordelingen $\delta(x)$ er definert ved

$$\int_a^b \delta(x)f(x)\,dx = \begin{cases} f(0) & \text{viss } 0\in(a,b) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Dirac-fordelingen $\delta(x)$ kan løst tenkes som en funksjon på (a,b) som er null over alt utenom i origo, men hvor integralet av $\delta(x)$ over (a,b) er lik 1.

<u>Laplacian</u> for <u>skalarfelt</u>: $\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

<u>Laplacian</u> for <u>vektorfelt</u>: $\nabla^2\mathbf{F} = (\nabla^2F_1)\mathbf{i} + (\nabla^2F_2)\mathbf{j} + (\nabla^2F_3)\mathbf{k}$

$\nabla^2\phi = 0$ på et domene D betyr ϕ er **<u>harmonisk</u>** på D

Vektor differensial identiteter

La ϕ og ψ være skalarfelt og la $\mathbf{F}$ og $\mathbf{G}$ være vektorfelt. Alle er gitt til å være **jevne** nok slik at alle partiell deriverte er kontinuerlige. Da holder de følgende identitetene

a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

b) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{F} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{F})$

c) $\nabla\times(\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{F} + \phi(\nabla\times\mathbf{F})$

d) $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{G} - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$

e) $\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\nabla\cdot\mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} - (\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}$

f) $\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = \mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G}) + \mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F}) + (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}$

g) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$ $\quad(\textbf{div curl} = 0)$

h) $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$ $\quad(\textbf{curl grad} = 0)$

i) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$ $\quad(\textbf{curl curl} = \textbf{grad div} - \text{Laplacian})$

Et vektorfelt $\mathbf{F}$ er **<u>solenoidalt</u>** i et domene D viss $\textbf{div}\,\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = 0$ i D.
Et vektorfelt $\mathbf{F}$ er **<u>rotasjonsfritt</u>** i et domene D viss $\textbf{curl}\,\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = 0$ i D.

$\mathbf{F}$ jevn og irrotasjonalt på et enkelt koblet domene $D \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla\phi$. Altså $\mathbf{F}$ er <u>konservativt</u> på D.

$\mathbf{F}$ jevn og solenoidalt på et domene D med egenskapen at hver lukket flate i D begrenser et domene i $D \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{G}$ for et vektorfelt $\mathbf{G}$ definert på D. $\mathbf{G}$ kalles **<u>vektor potensiale</u>** til $\mathbf{F}$.

GREENS TEOREM, GAUSS' TEOREM og STOKES TEOREM

Vanlig område

Et vanlig område er en **kompakt** (lukket og begrenset) mengde S i $\mathbb{R}^n$.

Et vanlig område i planet kan bli delt opp i ikke-kryssende delmengder som er x- og y-enkle.

Greens teorem

La R være et vanlig område i xy-planet hvis grense, $\mathcal{C}$, består av én eller flere stykkevis jevne enkle lukkede kurver som er **positivt orientert** med henhold til R (dvs. enhets normalen til $\mathcal{C}$ peker normalt bort fra R).
Viss $\mathrm{F} = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ er et jevnt vektorfelt på R, da er

$$\oint_{\mathcal{C}} [F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy] = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

Viss $\mathcal{C}$ er en positivt orientert jevn enkel lukket kurve som lukker et område R i planet, da har vi at

$$\oint_{\mathcal{C}} x\,dy = -\oint_{\mathcal{C}} y\,dx = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} (x\,dy - y\,dx) = \iint_R 1\,dA = \{\text{arealet til } R\}$$

Divergens teoremet i planet

La R være et vanlig område i xy-planet hvis grense, $\mathcal{C}$, består av én eller flere stykkevis jevne enkle lukkede kurver. La $\hat{\mathbf{N}}$ være enhets normalfeltet (utover fra R) på $\mathcal{C}$. Viss $\mathrm{F} = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ er et jevnt vektorfelt på R, da er

$$\iint_R \mathbf{div}\,\mathbf{F}\,dA = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\,dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,ds$$

Stokes teorem

La $\mathcal{S}$ være en stykkevisjevn orientert flate i rommet, med enhets normal felt $\hat{\mathbf{N}}$ og grense $\mathcal{C}$ bestående av en eller flere stykkevis jevne lukkede kurver med orientering arvet fra $\mathcal{S}$. Viss $\mathbf{F}$ er et jevnt vektorfelt definert på en åpen mengde som inneholde $\mathcal{S}$, da er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}\,\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS$$

Divergens teoremet i rommet (Gauss' teorem)

La D være et vanlig, tredimensjonalt område, hvis grense $\mathcal{S}$ er en orientert flate med enhets normalfelt $\hat{\mathbf{N}}$ pekende ut av D. Viss $\mathbf{F}$ er et jevnt vektorfelt definert på D, da er

$$\iiint_D \mathbf{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS$$

Varianter av divergens teoremet

Viss D tilfredsstiller betingelsene i divergens teoremet og har en flate $\mathcal{S}$, og viss $\mathbf{F}$ er et jevnt vektorfelt og ϕ er et jevnt skalarfelt, da er

$$\iiint_D \mathbf{curl}\,\mathbf{F}\,dV = \iiint_D \nabla \times \mathbf{F}\,dV = -\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{N}}\,dS$$

Og

$$\iiint_D \mathbf{grad}\,\phi\,dV = \iiint_D \nabla\phi\,dV = \oiint_{\mathcal{S}} \phi\hat{\mathbf{N}}\,dS$$

Valg av vektorfelt for å finne volum ved Gauss' teorem

For å finne volum til et tredimensjonalt område D med Gauss' teorem må man velge vektorfelt selv. De mest typiske feltene er

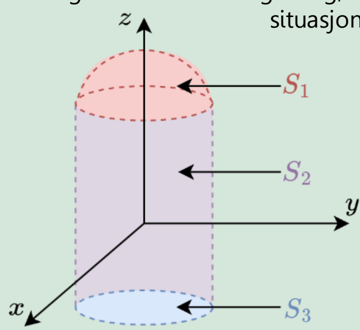
$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \qquad \mathbf{F} = 0\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad \mathbf{F} = \frac{1}{3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Dette fordi de er lette å jobbe med og har konstant gradient. Merk at med disse vektorfeltene får man $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1$, og for en orientert flate $\mathcal{S}$ som lukker D har vi

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_D 1\,dV = \{\text{volum til } D\}$$

Av og til kan det være gunstig, og også nødvendig, å dele opp flaten $\mathcal{S}$ i mindre delflater. Ta f.eks. situasjonen der D er en sylinder med sfærisk topp:



$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_2 dS_2 + \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_3 dS_3$$

$$= \iiint_D dV = \{\text{volum til } D\}$$

REFERANSER

[1] Silly rabbit at the English Wikipedia, “File:Frenet-Serret moving frame1.png”, Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frenet-Serret_moving_frame1.png (accessed Oct. 23, 2023). (Cropped) License CC BY-SA 3.0 Deed